10 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Página 277

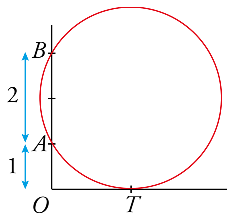
Resuelve

Optimización

- **Una persona se acerca a una estatua de 2 m de altura. Los ojos de la persona están 1 m por debajo de los pies de la escultura. ¿A qué distancia se debe acercar para que el ángulo, φ, bajo el cual ve la estatua sea máximo?**

  Hay una hermosa resolución por métodos geométricos. Obsérvala:

  Se traza una circunferencia que pasa por los puntos A y B y es tangente a la recta r.

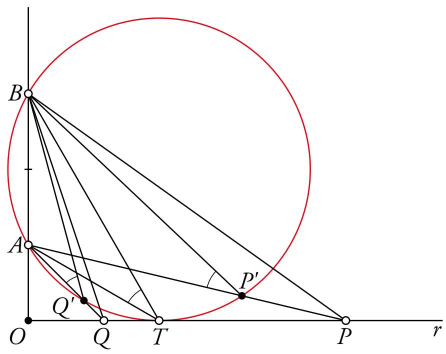


Demuestra que el punto de tangencia, T, es el lugar de la recta r desde el que se ve el segmento AB con ángulo máximo.

Para probar que el ángulo trazado desde el punto de tangencia T es el mayor posible entre todos los trazados desde puntos de la recta usaremos la siguiente propiedad:

«Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco son iguales».

Sea P un punto cualquiera situado sobre la recta r (análogamente se razonaría si se encuentra en la posición de Q). Unimos el punto P con B y obtenemos el punto de corte P con la circunferencia. El ángulo $\widehat{APB}$ es menor que el ángulo $\widehat{AP'B}$ pero $\widehat{AP'B} = \widehat{ATB}$ porque los dos son ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco AB. En consecuencia el ángulo trazado desde P es menor que el trazado desde el punto de tangencia T. Así, cualquier ángulo trazado desde puntos de la recta distintos de T es menor que $\widehat{ATB}$, de donde se deduce que este es el mayor ángulo posible.



1 RECTA TANGENTE A UNA CURVA

Página 279

1 Halla las rectas tangentes a cada curva que cumplen la condición que se indica:

a) $y = \dfrac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$

en los puntos de abscisa 0, 1, 3.

b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0$

en los puntos de abscisa $x_0 = 3$.

c) $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 6$

paralelas a la recta $y - x = 9$

d) $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x - 2$

que pasan por el punto $P(2, 0)$.

a) Calculamos la derivada de la función:

$$y' = \frac{(15x^2 + 14x - 16)(x - 2) - (5x^3 + 7x^2 - 16x)}{(x - 2)^2} = \frac{10x^3 - 23x^2 - 28x + 32}{(x - 2)^2}$$

Ordenadas de los puntos:

$y(0) = 0;\ y(1) = 4;\ y(3) = 150$

- Recta tangente en (0, 0): $y'(0) = 8$

$y = 8x$

- Recta tangente en (1, 4): $y'(1) = -9$

$y = 4 - 9(x - 1) = -9x + 13$

- Recta tangente en (3, 150): $y'(3) = 11$

$y = 150 + 11(x - 3) = 11x + 117$

b) Obtención de las ordenadas correspondientes:

$3^2 + y^2 - 2 \cdot 3 + 4y - 24 = 0$

$9 + y^2 - 6 + 4y - 24 = 0$

$y^2 + 4y - 21 = 0$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \begin{cases} y = 3 \to \text{Punto } (3, 3) \\ y = -7 \to \text{Punto } (3, -7) \end{cases}$$

Para hallar la pendiente en estos puntos, derivamos implícitamente:

$2x + 2yy' - 2 + 4y' = 0$

$y'(2y + 4) = 2 - 2x$

$y' = \dfrac{2 - 2x}{2y + 4} = \dfrac{1 - x}{y + 2}$

Así: $y'(3, 3) = -\dfrac{2}{5};\ y'(3, -7) = \dfrac{2}{5}$

- Recta tangente en (3, 3): $y = 3 - \dfrac{2}{5}(x - 3) = -\dfrac{2}{5}x + \dfrac{21}{5}$
- Recta tangente en (3, –7): $y = -7 + \dfrac{2}{5}(x - 3) = \dfrac{2}{5}x - \dfrac{41}{5}$

c) Pendiente de la recta: $y - x = 9 \to y = x + 9 \to m = 1$

$y' = x^2 - 2x + 3 \to x^2 - 2x + 3 = 1 \to x^2 - 2x + 2 = 0$ no tiene solución. Luego no existe ningún punto de la curva en el que las tangentes sean paralelas a la recta dada.

d) Llamamos $T(x, y)$ al punto de tangencia que, por ser de la curva, verifica:

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + x - 2 = y$$

La pendiente del segmento PT es $\frac{0-y}{2-x} = \frac{-y}{2-x}$, y tiene que coincidir con el valor de la derivada en (x, y). Es decir:

$$\frac{-y}{2-x} = x^2 - 2x + 1 \rightarrow -y = (x^2 - 2x + 1)(2 - x) \rightarrow y = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

Igualamos con la expresión anterior y resolvemos:

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + x - 2 = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \rightarrow \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow 2x^3 - 9x^2 + 12x = 0 \rightarrow x = 0$ es la única solución real.

Por tanto, el punto de tangencia es $(0, -2)$ y la ecuación de la recta tangente en ese punto es:

$$y = -2 + (0^2 - 2 \cdot (0) + 1)(x - 0) \rightarrow y = x - 2$$

2 ▸ CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Página 280

1 Demuestra que si una función $y = f(x)$ es decreciente en x_0, entonces:

$$f'(x_0) \le 0$$

Si $f(x)$ es decreciente en x_0 entonces existe un entorno de x_0, $E = (x_0 - a, x_0 + a)$ tal que, si $x \in E$, $x \ne x_0$, entonces:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

Por tanto, si $f(x)$ es derivable en x_0, se tiene que $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$.

2 Dada la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$:

a) ¿Dónde crece?

b) ¿Dónde decrece?

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$

a) $x < -1 \to y' > 0 \to f$ es creciente en $(-\infty, -1)$

$x > 3 \to y' > 0 \to f$ es creciente en $(3, +\infty)$

b) $-1 < x < 3 \to y' < 0 \to f$ es decreciente en $(-1, 3)$

3 ▶ MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN

Página 281

1 **Comprueba que la función $y = x^3/(x-2)^2$ tiene solo dos puntos singulares, en $x = 0$ y en $x = 6$.**

Averigua de qué tipo es cada uno de estos dos puntos singulares; para ello, debes estudiar el signo de la derivada.

$$y' = \frac{3x^2(x-2)^2 - 2(x-2)x^3}{(x-2)^4} = \frac{x^2(x-2)\left(3(x-2)-2x\right)}{(x-2)^4} = \frac{x^2(3x-6-2x)}{(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

$$y' = 0 \to x^2(x-6) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}01) > 0 \\ f'(0{,}01) > 0 \end{array}\right\} \text{ En } x = 0 \text{ hay un punto de inflexión.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(5{,}99) < 0 \\ f'(6{,}01) > 0 \end{array}\right\} \text{ En } x = 6 \text{ hay un mínimo relativo.}$$

2 **a) Halla todos los puntos singulares (abscisa y ordenada) de la función $y = -3x^4 + 4x^3$. Mediante una representación adecuada, averigua de qué tipo es cada uno de ellos.**

b) Haz lo mismo para $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

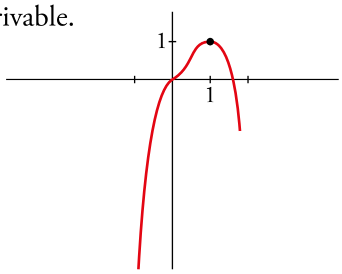
a) $y' = -12x^3 + 12x^2 = 12x^2(-x + 1)$

$$y' = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \to \text{Punto } (0, 0) \\ x = 1 \to \text{Punto } (1, 1) \end{array} \right\} \text{ Dos puntos singulares.}$$

Los dos puntos están en el intervalo [–1; 1,5], donde la función es derivable.

Además, $f(-1) = -7$ y $f(1{,}5) = -1{,}7$.

- En (0, 0) hay un punto de inflexión.
- En (1, 1) hay un máximo relativo.



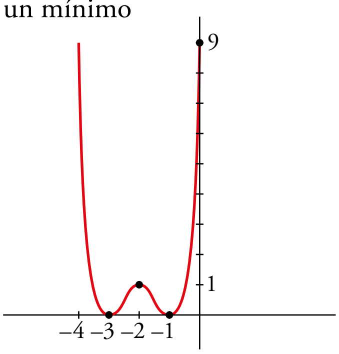
b) $y' = 4x^3 + 24x^2 + 44x + 24 = 4(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

$$y' = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -1 \to \text{Punto } (-1, 0) \\ x = -2 \to \text{Punto } (-2, 1) \\ x = -3 \to \text{Punto } (-3, 0) \end{array} \right\} \text{ Tres puntos singulares.}$$

Los tres puntos están en el mismo intervalo [–4, 0], donde la función es derivable.

Además, $f(-4) = f(0) = 9$.

- Hay un mínimo relativo en (–3, 0), un máximo relativo en (–2, 1) y un mínimo relativo en (–1, 0).



4 ▶ INFORMACIÓN EXTRAÍDA DE LA SEGUNDA DERIVADA

Página 283

1 **Estudia la curvatura de esta función:**

$$y = 3x^4 - 8x^3 + 5$$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2$; $f''(x) = 36x^2 - 48x$

$$f''(x) = 0 \;\to\; 12x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\to\; \text{Punto } (0, 5) \\ x = \dfrac{4}{3} \;\to\; \text{Punto } \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right) \end{cases}$$

$$\left(f'''(x) = 72x - 48;\; f'''(0) \neq 0;\; f'''\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0\right)$$

Los puntos $(0, 5)$ y $\left(\frac{4}{3}, -\frac{121}{27}\right)$ son puntos de inflexión.

- La función es cóncava en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$, pues $f''(x) > 0$.
- La función es convexa en el intervalo $\left(0, \frac{4}{3}\right)$, pues $f''(x) < 0$.

2 **Estudia la curvatura de la función siguiente:**

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \;\to\; 6x - 12 = 0 \;\to\; x = 2 \;\to\;$ Punto $(2, 2)$

$(f'''(x) = 6;\; f'''(2) \neq 0)$

El punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

- La función en convexa es $(-\infty, 2)$, pues $f''(x) < 0$.
- La función en cóncava es $(2, +\infty)$, pues $f''(x) > 0$.

5 OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

Página 285

1 Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.

Llamamos x al número que buscamos. Ha de ser $x > 0$. Tenemos que minimizar la función:

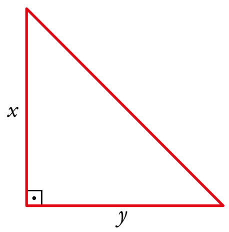
$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \; \begin{cases} x = 5 \;\to\; f(5) = 10 \\ x = -5 \;\to\; \text{(no vale, pues } x > 0) \end{cases}$$

(Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, y la función es continua en $(0, +\infty)$; hay un mínimo en $x = 5$)

Por tanto, el número buscado es $x = 5$. El mínimo es 10.

2 De entre todos los triángulos rectángulos cuyos catetos tienen longitudes que suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.



$$x + y = 10 \;\to\; y = 10 - x$$

$$\text{Área} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot (10 - x)}{2} = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

Tenemos que maximizar la función:

$$f(x) = x + \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

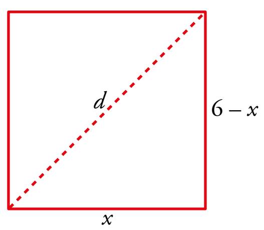
$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x = 0 \;\to\; x = 5 \;\to\; y = 10 - 5 = 5$$

$$\left(f(0) = 0;\ f(10) = 0;\ f(5) = \frac{25}{2};\ \text{y } f \text{ es continua. Luego en } x = 5 \text{ está el máximo} \right).$$

Los catetos miden 5 cm cada uno. El área máxima es de 12,5 cm^2.

3 [El ejercicio puede plantear dudas a los compañeros y las compañeras, de forma que el alumnado pueda trabajar la comunicación (dimensión social)].

Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?



$$d = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$$

Tenemos que minimizar la función:

$$f(x) = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$$

$$f'(x) = \frac{-2(6 - x) + 2x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-12 + 4x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-6 + 2x}{\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}}$$

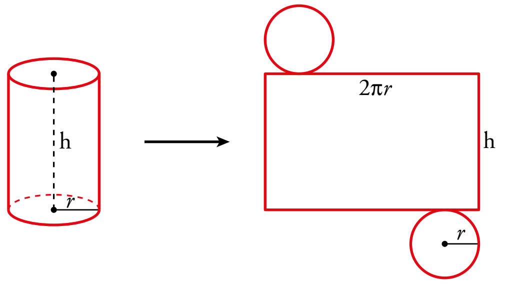
$$f'(x) = 0 \;\to\; -6 + 2x = 0 \;\to\; x = 3$$

$(f(0) = 6;\ f(6) = 6;\ f(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24;$ y $f(x)$ es continua. Luego en $x = 3$ hay un mínimo).

El rectángulo con la diagonal menor es el cuadrado de lado 3 m.

4 Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.

Suponemos el recipiente con dos tapas:



Área total $= 2\pi r\text{h} + 2\pi r^2 = 2\pi r(\text{h} + r)$

$V = 6{,}28\ l = 6{,}28\ \text{dm}^3$

Como $V = \pi \cdot r^2 \cdot \text{h} = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot \text{h} = 6{,}28 \;\rightarrow\; \text{h} = \dfrac{6{,}28}{3{,}14 \cdot r^2} = \dfrac{2}{r^2}$

Así: *Área total* $= 2\pi r\left(\dfrac{2}{r^2} + r\right) = 2\pi r\left(\dfrac{2}{r} + r^2\right)$

Tenemos que hallar el mínimo de la función:

$$f(r) = 2\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right),\quad r > 0$$

$$f'(r) = 2\pi\left(-\frac{2}{r^2} + 2r\right) = \left(\frac{-2 + 2r^3}{r^2}\right) = 0 \;\rightarrow\; -2 + 2r^3 = 0 \;\rightarrow\; r = \sqrt[3]{1} = 1$$

(Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(r) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(r) = +\infty$, y f es continua en $(0, +\infty)$; en $r = 1$ hay un mínimo).

$$r = 1 \;\rightarrow\; \text{h} = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{1} = 2$$

El cilindro tendrá radio 1 dm y altura 2 dm.

6 DOS IMPORTANTES TEOREMAS

Página 287

1 **Comprueba que la función $f(x) = sen\ x$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, \pi]$. ¿Dónde cumple la tesis?**

$y = sen\ x$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo $\mathbb{R}$.

Además, $f(0) = f(\pi) = 0$. Por tanto, cumple la hipótesis del teorema de Rolle.

$$\left.\begin{array}{l} y' = cos\ x = 0 \\ x \in (0, \pi) \end{array}\right\} \to \text{Cumple la tesis en: } x = \frac{\pi}{2}$$

2 ¿Qué te hace decir eso? **[El trabajo con las condiciones para aplicar el teorema de Rolle puede completarse a través de las tres fases que propone esta estrategia].**

Calcula b para que la función:

$$f(x) = x^3 - 4x + 3$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$. ¿Dónde cumple la tesis?

$f(x)$ es una función polinómica. Por tanto, es continua y derivable en $\mathbb{R}$ y, en particular, continua en $[0, b]$ y derivable es $(0, b)$.

Por otra parte debe ser:

$$f(0) = f(b) \to 3 = b^3 - 4b + 3 \to b^3 - 4b = 0 \to b = 2,\ b = 0,\ b = -2$$

De los tres resultados anteriores solo es válido $b = 2$ por las condiciones del problema.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \to 3x^2 - 4 = 0 \to x = \frac{2\sqrt{3}}{3},\ x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Como $\frac{2\sqrt{3}}{3} \in (0, 2)$, este es el valor al que se refiere la tesis del teorema de Rolle.

3 **Comprueba que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } -0{,}5 \le x < 1 \\ 5 - (x-2)^2 & \text{si } \quad 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-0{,}5;\ 4]$. ¿Dónde se cumple la tesis?

La función está definida por intervalos mediante funciones polinómicas. Será continua en $[-0{,}5;\ 4]$ si lo es en el punto $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(5 - (x-2)^2\right) = 4 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 4 \to f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

Estudiamos su derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -0{,}5 < x < 1 \\ -2(x-2) & \text{si } 1 < x < 4 \end{cases},\ f'(1^-) = 2 = f'(1^+) \to f(x) \text{ es derivable en } x = 1 \text{ y, por tanto, en el intervalo } (-0{,}5;\ 4).$$

Finalmente, $f(-0{,}5) = 1 = f(4)$.

El punto al que se refiere la tesis del teorema de Rolle lo obtenemos de $-2(x-2) = 0 \to x = 2$.

4 **Aplicando el teorema de Rolle, demuestra que la ecuación $x^3 - 3x + k = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo [–1, 1] cualquiera que sea el valor de k.**

$f(x) = x^3 - 3x + k$ es continua en $[-1, 1]$ y derivable en $(-1, 1)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

La derivada solo se anula en $x = -1$ y en $x = 1$.

Supongamos que $f(x)$ tiene dos raíces en $[-1, 1]$, sean c_1 y c_2. Por el teorema de Rolle, como $f(c_1) = f(c_2) = 0$, existiría un $c \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(c) = 0$.

Pero $f'(x)$ solo se anula en $x = -1$ y en $x = 1$, que no están incluidos en (c_1, c_2), pues $-1 \le c_1, c_2 \le 1$.

Hemos llegado a una contradicción.

Por tanto, $x^3 - 3x + k = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, cualquiera que sea el valor de k

Página 289

5 **Demuestra que $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 19 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2, 6]. ¿En qué punto cumple la tesis?**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (2x - 3) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (-x^2 + 10x - 19) = 5 \\ f(4) = 5 \end{array}\right\} \to f(x) \text{ es continua en } x = 4.$$

Luego $f(x)$ es continua en el intervalo $[2, 6]$. (Para $x \ne 4$ está formada por dos polinomios).

Veamos si es derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

En $x = 4$, tenemos que $f'(4^-) = f'(4^+) = 2$. Por tanto, la función es derivable en $(2, 6)$. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Luego, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$f'(c) = 1 \to -2x + 10 = 1 \to x = \frac{9}{2}$$

La tesis se cumple en $c = \dfrac{9}{2}$.

6 **Calcula a y b para que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a & \text{si } x \le 0 \\ -x^2 + bx & \text{si } x > 0 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en [–3, 2]. ¿Dónde cumple la tesis? Haz la gráfica.**

La función está definida por intervalos mediante funciones polinómicas. Será continua en $[-3, 2]$ si lo es en el punto $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 2x + a) = a \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x^2 + bx) = 0 \end{array}\right\} \to a = 0 = f(0)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } -3<x<0 \\ -2x+b & \text{si } 0<x<2 \end{cases} \to f'(0^-) = 2,\ f'(0^+) = b \to b = 2$$

Cuando $a = 0$ y $b = 2$ la función es continua en [–3, 2] y derivable en (–3, 2).

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x & \text{si } -3\le x<0 \\ -x^2+2x & \text{si } 0<x\le 2 \end{cases}$$

$$\frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)} = \frac{0-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

$2x + 2 = -\frac{3}{5} \to x = -\frac{13}{10}$ resultado un punto válido porque $-3 < -\frac{13}{10} < 0$.

$-2x + 2 = -\frac{3}{5} \to x = \frac{13}{10}$ también es un punto válido porque $0 < \frac{13}{10} < 2$.

7 **Aplica el teorema del valor medio, si es posible, en el intervalo [–2, –1] a la función siguiente:**

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Calcula el valor correspondiente a c y comprueba gráficamente el resultado obtenido.

$f(x)$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo $\mathbb{R}$. En particular, es continua en [–2, –1] y derivable en (–2, –1).

Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = \frac{6-12}{-1+2} = -6$$

$$f'(x) = 2x-3 = -6 \to x = \frac{-3}{2}$$

La tesis se cumple en $c = \frac{-3}{2}$.

8 **[La decisión sobre si se puede aplicar el teorema del valor medio puede servir para trabajar esta técnica].**

Repite el ejercicio anterior para la función:

$$g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$g(x)$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo $\mathbb{R}$. En particular, es continua en [–2, –1] y derivable en (–2, –1).

Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = \frac{g(-1)-g(-2)}{-1-(-2)} = \frac{0-(-9)}{-1+2} = 9$$

$$g'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 9 \to 3x^2 - 2x - 10 = 0$$

$$x = \frac{2\pm\sqrt{4+120}}{6} = \frac{2\pm\sqrt{124}}{6} = \frac{2\pm 2\sqrt{31}}{6} = \frac{1\pm\sqrt{31}}{3} \quad \begin{cases} x \approx 2,19 \\ x \approx -1,52 \end{cases}$$

Por tanto, se cumple la tesis en $c = \frac{1-\sqrt{31}}{3}$.

7 ▸ APLICACIONES TEÓRICAS DEL TEOREMA DEL VALOR DEL MEDIO

Página 291

1 Demuestra que si f es derivable en un entorno de x_0 y $f'(x_0) < 0$, entonces f es decreciente en x_0.

Por las hipótesis, existe un entorno $E = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en donde f' es negativa.

Sean x_1 y x_2 dos puntos del entorno tales que $x_1 < x_2$. f cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[x_1, x_2]$, por tanto, $\exists c \in (x_1, x_2)$ tal que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) < 0 \rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Es decir, f es decreciente en x_0.

2 Demuestra que si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces f presenta un máximo relativo en x_0.

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h} < 0$$

Si $h < 0$, entonces:

$$f'(x_0 + h) > 0 \rightarrow f \text{ es creciente a la izquierda de } x_0 \qquad (1)$$

Si $h > 0$, entonces:

$$f'(x_0 + h) < 0 \rightarrow f \text{ es creciente a la derecha de } x_0 \qquad (2)$$

Por (1) y (2), f presenta un máximo en x_0, ya que es creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a su derecha.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 292

1. Recta tangente y recta normal

Hazlo tú

- **Escribe la ecuación de la recta tangente y la de la recta normal a la curva $x^y y^x = 1$ en el punto (1, 1).**

  Para hallar la derivada, tomamos logaritmos:

  $$x^y \cdot y^x = 1 \to y \cdot \ln x + x \cdot \ln y = \ln 1 \to y \cdot \ln x + x \cdot \ln y = 0$$

  Derivamos:

  $$y' \cdot \ln x + y \cdot \frac{1}{x} + \ln y + x \cdot \frac{y'}{y} = 0$$

  $$y' \cdot xy \cdot \ln x + y^2 + xy \cdot \ln y + x^2 y' = 0$$

  $$y'(xy \cdot \ln x + x^2) = -y^2 - xy \cdot \ln y$$

  $$y' = \frac{-y^2 - xy \cdot \ln y}{xy \cdot \ln x + x^2}$$

  $$y'(1, 1) = -1$$

  Por tanto, la ecuación de la recta tangente en (1, 1) es:

  $$y = 1 - (x - 1); \text{ es decir, } y = -x - 2$$

2. Tangente que pasa por un punto exterior

Hazlo tú

- **Halla los puntos de la curva $f(x) = x^2 - 2x + 4$ en los que la recta tangente a ella pasa por el origen de coordenadas.**

  Los puntos de tangencia están en la curva y son de la forma $(a, a^2 - 2a + 4)$.

  La pendiente de la recta que pasa por el punto de tangencia y por el origen de coordenadas es $\frac{a^2 - 2a + 4 - 0}{a - 0}$.

  Por otro lado, la pendiente de la recta tangente será $f'(a) = 2a - 2$.

  Por tanto, $\frac{a^2 - 2a + 4}{a} = 2a - 2 \to a^2 - 2a + 4 = 2a^2 - 2a \to a = -2, \ a = 2$.

  Hay dos puntos de tangencia que corresponden a dos rectas tangentes:

  $$x = -2, \ f(-2) = 12, \ f'(-2) = -6 \to y = 12 - 6(x + 2)$$

  $$x = 2, \ f(2) = 4, \ f'(2) = 2 \to y = 4 + 2(x + 2)$$

3. Recta tangente en un punto de la curva

Hazlo tú

- **Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$ en el punto de coordenadas $\left(3, \frac{1}{3}\right)$. Comprueba que el segmento de esa recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.**

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$x = 3 \to y' = -\frac{1}{9} \to$ La recta es tangente es $y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3)$

La recta corta a los ejes en los puntos:

$$x = 0 \to y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(-3) = \frac{2}{3}$$

$$y = 0 \to 0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3) \to x = 6$$

Si $P\left(3, \frac{1}{3}\right)$; $Q\left(0, \frac{2}{3}\right)$ y $R(6, 0)$.

El punto medio del segmento $\overline{QR}$ es $\left(\frac{0+6}{2}, \frac{\frac{2}{3}+0}{2}\right) = \left(3, \frac{1}{3}\right) = P$.

Por tanto, P divide al segmento en dos partes iguales.

Página 293

4. Intervalos de crecimiento

Hazlo tú

- **Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ **b)** $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$

a) El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}$$

$f'(x) = 0 \to x^4 - 12x^2 = 0 \to x = 2\sqrt{3},\ x = -2\sqrt{3},\ x = 0$

Como el denominador es un cuadrado, el signo de $f'(x)$ depende solo del signo del numerador.

$f' > 0$	$-2\sqrt{3}$	$f' < 0$	-2	$f' < 0$	0	$f' < 0$	2	$f' < 0$	$2\sqrt{3}$	$f' > 0$
↗		↘		↘		↘		↘		↗

Es creciente en $(-\infty, -2\sqrt{3})$ y $(2\sqrt{3}, +\infty)$.

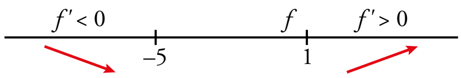
Es decreciente en $(-2\sqrt{3}, -2)$; $(-2, 0)$; $(0, 2)$ y $(2, 2\sqrt{3})$.

b) El dominio de definición es $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x-5}$$

$f'(x) = 0 \to 2x + 4 = 0 \to x = -2$ (que no pertenece al dominio)

No tiene puntos singulares.



Es creciente en el intervalo $(1, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, -5)$.

Página 294

6. Puntos en los que se anulan f', f'' y f'''

Hazlo tú

- **Estudia si la función $f(x) = 3 - (x + 1)^4$ tiene algún máximo, mínimo o punto de inflexión.**

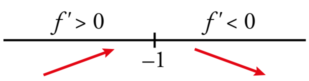
$f'(x) = -4(x + 1)^3$

$f''(x) = -12(x + 1)^2$

$f'''(x) = -24(x + 1)$

$f'(-1) = f''(-1) = f'''(-1) = 0$

Estudiamos el signo de f' a la izquierda y a la derecha de -1.



El punto $(-1, 3)$ es un máximo relativo.

7. Parámetros de una función definida a trozos

Hazlo tú

- **Calcula b y d para que la función $f(x) = -x^3 + bx^2 + x + d$ tenga un máximo relativo en el punto $(1, 4)$.**

La función pasa por el punto $(1, 4) \rightarrow f(1) = 4$

Tiene un máximo en $x = 1 \rightarrow f'(1) = 0$

$$f(1) = -1 + b + 1 + d = 4 \rightarrow b + d = 4$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2bx + 1 \rightarrow f'(1) = -3 + 2b + 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} b + d = 4 \\ -3 + 2b + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow b = 1, \ d = 3$$

Los valores buscados son $b = 1$ y $d = 3$.

Páginas 295

9. Área máxima

Hazlo tú

- **Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total 54 cm². Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.**

Llamemos r al radio del cilindro y h a la altura.

El área total es $S = 2\pi r^2 + 2\pi r\text{h}$.

$$2\pi r^2 + 2\pi r\text{h} = 54 \rightarrow \text{h} = \frac{27 - \pi r^2}{\pi r}$$

El volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \dfrac{27 - \pi r^2}{\pi r} = r(27 - \pi r^2) = 27r - \pi r^3$.

Buscamos las dimensiones del cilindro de volumen máximo.

$$V'(r) = 27 - 3\pi r^2$$

$$V'(r) = 0 \;\to\; 27 - 3\pi r^2 = 0 \;\to\; r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \text{ cm}$$

$$V''(r) = -6\pi r$$

$$V''(r) < 0 \;\to\; \text{En } r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \text{ hay un máximo relativo.}$$

Solo falta calcular la altura del cilindro, que es $h = \dfrac{27 - \pi \cdot 9/\pi}{\pi \cdot 3/\sqrt{\pi}} = \dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$ cm.

10. Problema de tiempo mínimo

Hazlo tú

- **La vela mayor de un barco tiene forma de triángulo rectángulo. Si la hipotenusa debe medir 6 m, calcula sus dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.**

Llamemos x, y a las medidas de los catetos del triángulo rectángulo.

$$x^2 + y^2 = 36 \;\to\; y = \sqrt{36 - x^2}$$

La superficie de la vela es $S = \dfrac{xy}{2}$ ya que los catetos hacen de base y de altura del triángulo rectángulo.

Se obtiene:

$$S(x) = \frac{x\sqrt{36 - x^2}}{2}$$

$$S'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{36 - x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{36 - x^2}}\right) = \frac{18 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \;\to\; 18 - x^2 = 0 \;\to\; x = 3\sqrt{2},\; x = -3\sqrt{2} \;\text{ (no vale)}$$

El valor $x = 3\sqrt{2}$ es un máximo como se puede comprobar estudiando el signo de f' a ambos lados del mismo.

El otro cateto del triángulo mide $y = \sqrt{36 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$

La vela es un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden $3\sqrt{2}$ m.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 296

1. Tangente perpendicular a una recta

- **Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ que son perpendiculares a la recta $x + y - 2 = 0$.**

La recta $y = -x + 2$ tiene pendiente -1. Cualquier recta perpendicular a ella tendrá pendiente $-\frac{1}{-1} = 1$. Por tanto, debemos calcular los puntos de la curva en los que la pendiente vale 1.

$$f'(x) = 12x^2 - 2$$

$$f'(x) = 1 \rightarrow 12x^2 - 2 = 1 \rightarrow x = -\frac{1}{2},\ x = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2},\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2} + 1\left(x + \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = x + 2$$

$$x = \frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} + 1\left(x - \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = x$$

2. Intervalos de concavidad y convexidad

- **Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función:**

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

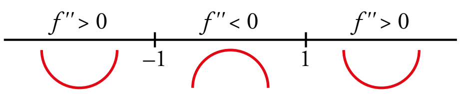
El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$$

$f''(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 1 = 0$ no tiene solución $\rightarrow$ No tiene puntos de inflexión y la tabla de los signos de la segunda derivada es:



(el signo de la segunda derivada solo depende del denominador)

La función es cóncava en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$. Es convexa en $(-1, 1)$.

3. Máximo y mínimo absoluto

- **Calcular el máximo y el mínimo absolutos, en el intervalo [–1, 2] de la función:**

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - x$$

$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - x$ está definida en $\mathbb{R}$ ya que el argumento del logaritmo siempre es positivo. Es una función continua y derivable en $[-1, 2]$. Por ser continua en un intervalo cerrado y acotado, alcanza sus extremos absolutos. Estos pueden ser los extremos del intervalo o los extremos relativos si están en el interior.

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - 1$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{2x+1}{x^2+x+1} = 1 \;\rightarrow\; 2x+1 = x^2+x+1 \;\rightarrow\; x = 1,\; x = 0$$

Evaluamos:

$x = -1 \;\rightarrow\; f(-1) = \ln\left((-1)^2 + (-1) + 1\right) - (-1) = 1$

$x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = \ln 1 = 0$

$x = 1 \;\rightarrow\; f(1) = \ln 3 - 1 \approx 0{,}0986$

$x = 2 \;\rightarrow\; f(2) = \ln 7 - 2 \approx -0{,}054$

Alcanza el máximo absoluto en $(1, 1)$ y el mínimo absoluto en $(2, \ln 7 - 2)$.

4. Teorema del valor medio

- **Dada la función $f(x) = x^{\sqrt{x^2-4x+7}}$, demostrar que existe un valor $c \in (1, 3)$ tal que $f'(c) = 4$.**

Para que la función esté definida debe ser el radicando mayor o igual que 0.

La inecuación $x^2 - 4x + 7 \geq 0$ es cierta en $\mathbb{R}$. Por tanto, el dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R}$ y es continua en $[1, 3]$.

Calculamos la derivada:

$$\ln f(x) = \sqrt{x^2-4x+7}\,\ln x \;\rightarrow\; \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+7}}\ln x + \sqrt{x^2-4x+7}\,\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{(x-2)\ln x}{\sqrt{x^2-4x+7}} + \frac{\sqrt{x^2-4x+7}}{x} = \frac{x(x-2)\ln x + x^2 - 4x + 7}{x\sqrt{x^2-4x+7}} \;\rightarrow\; f'(x) = x^{\sqrt{x^2-4x+7}}\,\frac{x(x-2)\ln x + x^2-4x+7}{x\sqrt{x^2-4x+7}}$$

Por tanto, la función es derivable en $(1, 3)$.

Por el teorema del valor medio existe un punto $c \in (1, 3)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(3) - f(1)}{3-1} = \dfrac{9-1}{2} = 4$.

5. Extremos relativos

- **Sea $f(x) = x^2 e^{-ax}$ con $a \neq 0$.**

a) Calcular el valor de a para que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$.

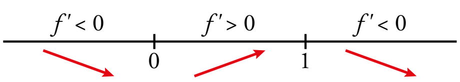
b) Clasificar los extremos relativos cuando $a = 2$.

a) $f'(x) = 2xe^{-ax} - ax^2e^{-ax}$

$f'(2) = 0 \;\rightarrow\; 4e^{-2a} - 4ae^{-2a} = 0 \;\rightarrow\; e^{-2a}(4-4a) = 0 \;\rightarrow\; 4 - 4a = 0 \;\rightarrow\; a = 1$ (ya que la exponencial nunca se anula)

b) Para $a = 2$ la derivada es $f'(x) = 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x}$.

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 1,\; x = 0$



$x = 0,\; f(0) = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$ es un mínimo relativo.

$x = 1,\; f(1) = e^{-2} \;\rightarrow\; (1, e^{-2})$ es un máximo relativo.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 297

Para practicar

Recta tangente

1 **Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:**

a) $y = ln\,(tg\,2x)$ **en** $x = \frac{\pi}{8}$ **b)** $y = \sqrt{sen\,5x}$ **en** $x = \frac{\pi}{6}$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 15 = 0$ **en** $x = 2$ **d)** $y = (x^2 + 1)^{sen\,x}$ **en** $x = 0$

a) • Ordenada en el punto: $x = \frac{\pi}{8} \to y = 0$

• Pendiente de la recta: $y' = \frac{2(1 + tg^2\,2x)}{tg\,2x} \to y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4$

• Recta tangente: $y = 4\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 4x - \frac{\pi}{2}$

b) • Ordenada en el punto: $x = \frac{\pi}{6} \to y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• Pendiente de la recta: $y' = \frac{5\,cos\,5x}{2\sqrt{sen\,5x}} \to y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5(-\sqrt{2}/2)}{2\sqrt{2/2}} = \frac{-5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-5\sqrt{6}}{4}$

• Recta tangente: $y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{6}}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c) • Ordenadas en los puntos:

$4 + y^2 - 4 - 8y + 15 = 0 \to y^2 - 8y + 15 = 0$

$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{4} = \frac{8 \pm 2}{4}$ $\begin{cases} y = 5 \to \text{Punto}\,(2, 5) \\ y = 3 \to \text{Punto}\,(2, 3) \end{cases}$

• Pendiente de las rectas:

$2x + 2yy' - 2 - 8y' = 0$

$y'(2y - 8) = 2 - 2x \to y' = \frac{2 - 2x}{2y - 8} = \frac{1 - x}{y - 4}$

$y'(2, 5) = \frac{1 - 2}{5 - 4} = -1$

$y'(2, 3) = \frac{1 - 2}{3 - 4} = 1$

• Recta tangente en (2, 5): $y = 5 - 1 \cdot (x - 2) \to y = -x + 7$

• Recta tangente en (2, 3): $y = 3 + 1 \cdot (x - 2) \to y = x + 1$

d) • Ordenada en el punto: $x = 0 \to y = (0 + 1)^{sen\,0} = 1^0 = 1 \to P(0, 1)$

• Pendiente de la recta tangente:

$y = (x^2 + 1)^{sen\,x} \to ln\,y = sen\,x \cdot ln\,(x^2 + 1) \to$

$\to \frac{y'}{y} = cos\,x \cdot ln\,(x^2 + 1) + sen\,x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \to$

$\to y' = \left[cos\,x \cdot ln\,(x^2 + 1) + \frac{2x \cdot sen\,x}{x^2 + 1}\right](x^2 + 1)^{sen\,x}$

$m = [cos\,0 \cdot ln\,1 + 0] \cdot 1^0 = (1 \cdot 0 + 0) \cdot 1 = 0$

• Recta tangente: $y = 1 + 0(x - 0) \to y = 1$

2 Halla las tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ paralelas a la recta $2x + y = 0$.

La pendiente de la recta $2x + y = 0$ es $m = -2$.

Buscamos los puntos en los que la derivada sea igual a -2:

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$y' = -2 \rightarrow \frac{2x}{x^2 - 2x + 1} = -2 \rightarrow -2 = -2(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto}\,(0, 0) \\ x = 2 \rightarrow \text{Punto}\,(2, 4) \end{cases}$$

Recta tangente en (0, 0): $y = -2x$

Recta tangente en (2, 4): $y = 4 - 2(x - 2) \rightarrow y = -2x + 8$

3 Obtén la ecuación de la recta tangente paralela al eje de abscisas en las siguientes curvas:

a) $y = x\, ln\, x$ **b)** $y = x^2 e^x$ **c)** $y = sen\, 2x$

Una recta paralela al eje de abscisas tiene pendiente cero.

a) $y' = ln\, x + x \cdot \dfrac{1}{x} = ln\, x + 1$

$y' = 0 \rightarrow ln\, x + 1 = 0 \rightarrow ln\, x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \rightarrow y = \dfrac{-1}{e}$

La recta tangente en el punto $\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{-1}{e}\right)$ es: $y = \dfrac{-1}{e}$

b) $y' = 2x\, e^x + x^2 e^x = (2x + x^2)e^x$

Como $e^x \neq 0$ para todo x:

$$y' = 0 \rightarrow 2x + x^2 = 0 \rightarrow x(2 + x) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto}\,(0, 0) \\ x = -2 \rightarrow \text{Punto}\,(-2, 4/e^2) \end{cases}$$

- En el punto (0, 0), la recta tangente es: $y = 0$
- En el punto $\left(-2, \dfrac{4}{e^2}\right)$, la recta tangente es: $y = \dfrac{4}{e^2}$

c) $y' = 2\, cos\, 2x$

$$y' = 0 \rightarrow 2\, cos\, 2x = 0 \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \rightarrow y = 1 \\ 2x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k \rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k \rightarrow y = -1 \end{cases}$$

- En los puntos $\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k, 1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = 1$
- En los puntos $\left(\dfrac{3\pi}{4} + \pi k, -1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = -1$

4 Halla el punto de la gráfica de $y = 2\sqrt{x}$ en el que la tangente forma un ángulo de 60° con el eje X. Escribe la ecuación de esa tangente.

- Si la recta tangente forma un ángulo de 60° con el eje X, su pendiente es $tg\, 60° = \sqrt{3}$.
- Buscamos un punto en el que la derivada valga $\sqrt{3}$:

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \sqrt{3} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{3} \rightarrow 1 = 3x \rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

El punto es $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

- La recta tangente en ese punto será:

$$y' = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) \to y = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} \to y = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

5 a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ en $x = 3$.

b) ¿Existe alguna otra recta tangente a la gráfica de f que sea paralela a la que has hallado? En caso afirmativo, hállala.

a) Hallamos la pendiente de la recta tangente usando la derivada:

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$x = 3,\ f(3) = 8,\ f'(3) = 11 \to y = 8 + 11(x - 3)$

b) Para saber si existe otro punto en el que la recta tangente sea paralela resolvemos:

$f'(x) = 11 \to 3x^2 - 6x + 2 = 11 \to x = 3,\ x = -1$

Hay otro punto:

$x = -1,\ f(-1) = -4 \to y = -4 + 11(x + 1)$ es la recta tangente en este punto.

6 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.

Calculamos primero el punto de inflexión resolviendo $f''(x) = 0$:

$f'(x) = 12x^2 - 4x$

$f''(x) = 24x - 4$

$f''(x) = 0 \to 24x - 4 = 0 \to x = \frac{1}{6}$

Evaluando la derivada segunda a ambos lados de $x = \frac{1}{6}$ observamos que la función pasa de convexa a cóncava. Luego es un punto de inflexión.

$$x = \frac{1}{6},\ f\left(\frac{1}{6}\right) = 4\left(\frac{1}{6}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 10 = -\frac{271}{27},\ f'\left(\frac{1}{6}\right) = 12\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

La ecuación es $y = -\frac{271}{27} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)$

7 Halla los puntos de la curva:

$$y = 3x^2 - 5x + 12$$

en los que la recta tangente a ella pase por el origen de coordenadas.

Debemos hallar las ecuaciones de las tangentes desde un punto exterior a la gráfica de la función.

Los puntos de tangencia son de la forma $(a, 3a^2 - 5a + 12)$.

La pendiente de la recta tangente que pasa por el origen es $\frac{3a^2 - 5a + 12 - 0}{a - 0} = \frac{3a^2 - 5a + 12}{a}$.

Usando la derivada, la pendiente anterior también es $6a - 5$.

$$\frac{3a^2 - 5a + 12}{a} = 6a - 5 \to 3a^2 - 5a + 12 = 6a^2 - 5a \to a -2,\ a = 2$$

Obtenemos dos puntos de tangencia y dos rectas tangentes:

$x = -2,\ f(-2) = 34,\ f'(-2) = -17 \to y = -17x$

$x = 2,\ f(2) = 14,\ f'(2) = 7 \to y = 7x$

8 **Halla los puntos de la curva:**

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$$

en los que la recta tangente a esta pase por el punto (0, –8). Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

Debemos hallar las ecuaciones de las tangentes desde un punto exterior a la gráfica de la función.

Los puntos de tangencia son de la forma $\left(a, \frac{a^2}{4} + 4a - 4\right)$.

La pendiente de la recta tangente que pasa por $(0, -8)$ es $\dfrac{\frac{a^2}{4} + 4a - 4 - (-8)}{a - 0} = \dfrac{\frac{a^2}{4} + 4a + 4}{a}$.

Usando la derivada, la pendiente anterior también es $\frac{a}{2} + 4$.

$$\frac{\frac{a^2}{4} + 4a + 4}{a} = \frac{a}{2} + 4 \to \frac{a^2}{4} + 4a + 4 = \frac{a^2}{4} + 4a \to a = -4,\ a = 4$$

Obtenemos dos rectas tangentes:

$$f'(-4) = 2 \to y = -8 + 2x$$

$$f'(4) = 6 \to y = -8 + 6x$$

9 **Halla, en cada caso, las ecuaciones de las rectas tangentes paralelas al eje** ***X*****:**

a) $y = \dfrac{x^3}{3(x-1)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{ln\, x}$ **c)** $y = \dfrac{x^2 + 2x}{e^x}$

a) El eje horizontal tiene pendiente 0.

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{3(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \to x^2(2x-3) = 0 \to x = 0,\ x = \frac{3}{2}$$

$$x = 0,\ f(0) = 0 \to y = 0$$

$$x = \frac{3}{2},\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{9}{4} \to y = \frac{9}{4}$$

b) $y' = \dfrac{2x\, ln\, x + x^2 \frac{1}{x}}{ln^2 x} = \dfrac{x(2\, ln\, x + 1)}{ln^2 x}$

$$y' = 0 \to x(2\, ln\, x + 1) = 0 \to x = 0 \text{ (no vale)},\ x = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}},\ f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{e} \to y = -\frac{2}{e}$$

c) $y' = \dfrac{(2x+2)e^x - (x^2+2x)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{2 - x^2}{e^{2x}}$

$$y' = 0 \to 2 - x^2 = 0 \to x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2},\ f(\sqrt{2}) = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} \to y = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$$

$$x = -\sqrt{2},\ f(-\sqrt{2}) = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{e^{-\sqrt{2}}} \to y = e^{\sqrt{2}}(2 - 2\sqrt{2})$$

Máximos y mínimos. Puntos de inflexión

10 **Halla los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

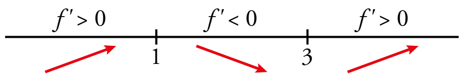
a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ **b)** $y = \dfrac{x^3(3x-8)}{12}$ **c)** $y = x^4 - 2x^3$

d) $y = x^4 + 2x^2$ **e)** $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **f)** $y = e^x(x-1)$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = 4 \end{cases}$

Signo de la derivada:



Hay un mínimo en (3, 0) y un máximo en (1, 4).

Puntos de inflexión:

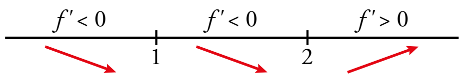
$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 2$$

Como $f''(x) < 0$ para $x < 2$ y $f''(x) > 0$ para $x > 2$, el punto (2, 2) es un punto de inflexión.

b) $y = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{12}$

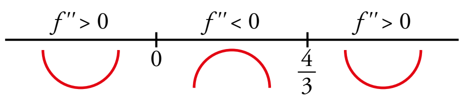
$f'(x) = \dfrac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 2 \rightarrow y = -4/3 \end{cases}$



Hay un mínimo en $\left(2, \dfrac{-4}{3}\right)$.

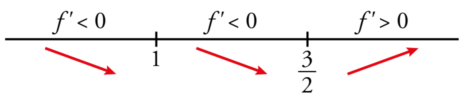
$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 4/3 \rightarrow y = -(64/81) \end{cases}$



Hay un punto de inflexión en (0, 0) y otro en $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-64}{81}\right)$.

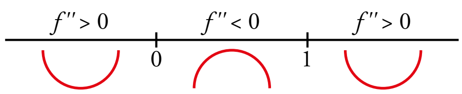
c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(4x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 3/2 \rightarrow y = -27/16 \end{cases}$



Hay un mínimo en $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-27}{16}\right)$.

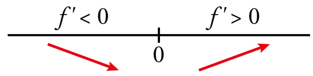
$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = -1 \end{cases}$



Hay un punto de inflexión en (0, 0) y otro en (1, –1).

d) $f'(x) = 4x^3 + 4x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x(x^2 + 1) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$



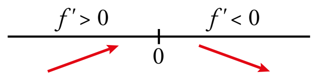
Hay un mínimo en (0, 0).

$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0$ para todo x.

No hay puntos de inflexión.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

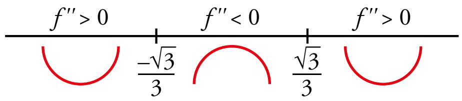
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$



Hay un máximo en (0, 1).

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}$$

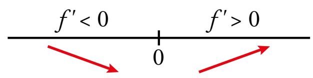
$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; y = \frac{3}{4}$$



Hay un punto de inflexión en $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$ y otro en $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$.

f) $f'(x) = e^x(x - 1) + e^x = e^x(x - 1 + 1) = xe^x$

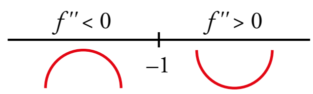
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; xe^x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (pues $e^x \neq 0$ para todo x) $\rightarrow\; y = 1$



Hay un mínimo en (0, –1).

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; y = \dfrac{-2}{e}$



Hay un punto de inflexión en $\left(-1, \dfrac{-2}{e}\right)$.

11 **Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x - 2)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$ **e)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **f)** $y = \dfrac{8}{x^2(x - 3)}$

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x - 2)} = \dfrac{8 - 3x}{x^2 - 2x}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 2\}$

$$f'(x) = \frac{-3(x^2 - 2x) - (8 - 3x) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-3x^2 + 6x - 16x + 16 + 6x^2 - 6x}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-3x^2 + 16x + 16}{(x^2 - 2x)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; 3x^2 - 16x + 16 = 0 \;\to\; x = \dfrac{16 \pm \sqrt{256-192}}{6} = \dfrac{16 \pm \sqrt{64}}{6} = \dfrac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$

Signo de la derivada:

$f' > 0$		$f' > 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
↗	0	↗	$\frac{4}{3}$	↘	2	↘	4	↗

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$.

Es decreciente en $\left(\dfrac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$.

Tiene un máximo en $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{9}{2}\right)$, y un mínimo en $\left(4, -\dfrac{1}{2}\right)$.

b) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f'(x) = \dfrac{2x(x^2-1) - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; -4x = 0 \;\to\; x = 0$

Signo de la derivada:

$f' > 0$		$f' > 0$		$f' < 0$		$f' < 0$
↗	-1	↗	0	↘	1	↘

La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

Es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Tiene un máximo en $(0, -1)$.

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; x^2(x^2-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x\ \sqrt{3} \end{cases}$

Signo de la derivada:

$f' > 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
↗	$-\sqrt{3}$	↘	-1	↘	0	↘	1	↘	$\sqrt{3}$	↗

La función es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

Es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

Tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Tiene un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{(4x-3)\cdot(2-x)-(2x^2-3x)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{8x-4x^2-6+3x+2x^2-3x}{(2-x)^2} = \frac{-2x^2+8x-6}{(2-x)^2} = \frac{-2\,(x^2-4x+3)}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de la derivada:

$f' < 0$	1	$f' > 0$	2	$f' > 0$	3	$f' < 0$
↘		↗		↗		↘

La función: es creciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$.

es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(1, -1)$.

tiene un máximo en $(3, -9)$.

e) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2xx - (x^2-1)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2-1}{x} = 0$. No tiene solución.

Signo de la derivada:

$f' > 0$	0	$f' > 0$
↗		↗

La función es creciente en todo su dominio.

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

$$f'(x) = \frac{-8\,(3x^2-6x)}{x^4\,(x-3x)^2} = \frac{-8x\,(3x-6)}{x^4\,(x-3x)^2} = \frac{-8\,(3x-6)}{x^3\,(x-3x)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

Signo de la derivada:

$f' < 0$	0	$f' > 0$	2	$f' < 0$	3	$f' < 0$
↘		↗		↘		↘

La función: es creciente en $(0, 2)$.

es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

tiene un máximo en $(2, -2)$.

12 **Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$ **c)** $y = (x-2)^4$

d) $y = x\,e^x$ **e)** $y = \dfrac{2-x}{x+1}$ **f)** $y = ln\,(x+1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f''(x)$:

$f'' < 0$	0	$f'' > 0$
∩		∪

La función es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.

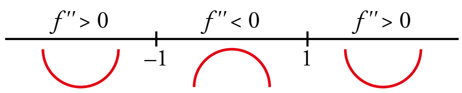
Tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$.

b) $y = x^4 - 6x^2$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Signo de $f''(x)$:



La función es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y convexa en $(-1, 1)$.

Tiene un punto de inflexión en $(-1, -5)$ y otro en $(1, -5)$.

c) $y = (x - 2)^4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4(x - 2)^3$; $f''(x) = 12(x - 2)^2$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = 2$

$f''(x) > 0$ para $x \neq 2$

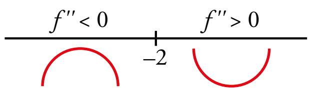
Por tanto, la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión.

d) $y = x\, e^x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + x\, e^x = (1 + x)e^x$; $f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = -2$ ($e^x \neq 0$ pata todo x)

Signo de $f''(x)$:



La función es convexa en $(-\infty, -2)$ y cóncava en $(-2, +\infty)$.

Tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$.

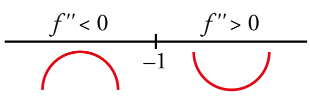
e) $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{-1\,(x+1) - (2 - x)}{(x+1)^2} = \frac{-x - 1 - 2 + x}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para todo x.

Signo de $f''(x)$:



La función es convexa en $(-\infty, -1)$ y cóncava en $(-1, +\infty)$.

No tiene puntos de inflexión.

f) $y = ln\,(x + 1)$. *Dominio* = $(-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$f''(x) < 0$ para $x \in (-1, +\infty)$

Por tanto, la función es convexa en $(-1, +\infty)$.

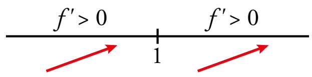
13 **Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$:**

a) $y = 1 + (x-1)^3$ **b)** $y = 2 + (x-1)^4$ **c)** $y = 3 - (x-1)^6$ **d)** $y = -3 + 2(x-1)^5$

a) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 3(x-1)^2 \rightarrow 3(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 1$

Estudiamos el signo de la derivada:



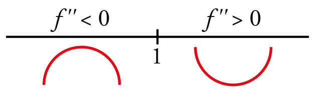
La función crece a la izquierda y a la derecha de $x = 1$.

No hay ni un máximo ni un mínimo.

• Puntos de inflexión: buscamos los puntos en los que $f''(x) = 0$.

$f''(x) = 6(x-1) \rightarrow 6(x-1) = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 1$

Estudiamos el signo de $f''(x)$:



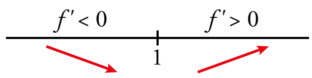
Es convexa a la izquierda de $x = 1$ y cóncava a su derecha.

Hay un punto de inflexión en $(1, 1)$.

b) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 4(x-1)^3 \rightarrow 4(x-1)^3 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 2$

Estudiamos el signo de la derivada:



La función decrece a la izquierda de $x = 1$ y crece a su derecha.

Hay un mínimo en $(1, 2)$.

• Podemos comprobar que no hay puntos de inflexión con el signo de $f''(x)$:

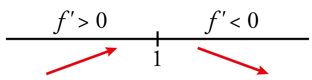
$f''(x) = 12(x-1)^2 \rightarrow f''(x) \geq 0$ para cualquier x.

La función es cóncava en todo su dominio.

c) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = -6(x-1)^5 \rightarrow -6(x-1)^5 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 3$

Estudiamos el signo de la derivada:



La función crece a la izquierda de $x = 1$ y decrece a su derecha.

Hay un máximo en $(1, 3)$.

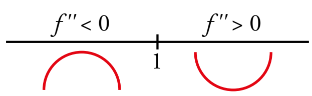
• Como $f''(x) = -30(x-1)^4 \leq 0$, la función es convexa en todo su dominio.

d) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 10(x-1)^4 \rightarrow 10(x-1)^4 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = -3$

Como $f'(x) = 10(x-1)^4 \geq 0$, la función es creciente en todo su dominio. No hay máximos ni mínimos.

Estudiamos el signo de $f''(x) = 40(x-1)^3$:



La función es convexa a la izquierda de $x = 1$ y cóncava a su derecha.

Hay un punto de inflexión en $(1, -3)$.

14 **Determina los máximos y mínimos de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ **b)** $f(x) = x\ ln\ x$ **c)** $f(x) = sen\ x - cos\ x$ **d)** $f(x) = e^{-x^2}$

a) $f'(x) = 1 - \dfrac{8}{(x+1)^3}$

$f'(x) = 0 \to 1 - \dfrac{8}{(x+1)^3} = 0 \to (x-1)^3 = 8 \to x = 3$

$f''(x) = 1 - \dfrac{24}{(x-1)^4}$

$x = 3,\ y = 4,\ f''(3) > 0 \to$ El punto (3, 4) es un mínimo relativo de la función.

b) $f'(x) = ln\ x + 1$

$f'(x) = 0 \to ln\ x + 1 = 0 \to x = e^{-1}$

$f''(x) = \dfrac{1}{x}$

$x = e^{-1},\ y = -e^{-1},\ f''(e^{-1}) > 0 \to$ El punto $(e^{-1}, -e^{-1})$ es un mínimo relativo de la función.

c) $f'(x) = cos\ x + sen\ x$

$f'(x) = 0 \to cos\ x + sen\ x = 0 \to sen\ x = -cos\ x \to tg\ x = -1$ (ya que $cos\ x$ no puede ser 0)

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$f''(x) = -sen\ x + cos\ x$

$x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ y = sen\ \dfrac{3\pi}{4} - cos\ \dfrac{3\pi}{4} = \sqrt{2},\ f''\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) < 0 \to$ Los puntos $\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, \sqrt{2}\right)$ son máximos relativos de la función.

$x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ y = sen\ \dfrac{7\pi}{4} - cos\ \dfrac{7\pi}{4} = -\sqrt{2},\ f''\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) > 0 \to$ Los puntos $\left(\dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi, -\sqrt{2}\right)$ son mínimos relativos de la función.

d) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \to -2xe^{-x^2} = 0 \to x = 0$

$f''(x) = -2xe^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$

$x = 0,\ y = 0,\ f''(0) < 0 \to$ El punto (0, 0) es un máximo relativo.

15 Cadena de consecuencias. **[El alumnado puede utilizar este organizador gráfico para representar la sucesión de razonamientos que le han permitido estudiar la funciones].**

Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 + 7x - 4 & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 + 3x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

a) Comprueba que son derivables en $\mathbb{R}$.

b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos.

Ambas funciones son continuas y derivables salvo quizás en los puntos donde se separan los trozos porque están definidas por intervalos mediante funciones polinómicas.

a) Estudiamos el punto $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (4x - 2) = 2 \end{cases} \to \lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1) \to \text{Es continua también en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x<1 \\ 4 & \text{si } x>1 \end{cases} \to f'(1^-) = 4 = f'(1^+) \to \text{Es derivable en } x = 1.$$

Estudiamos el punto $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} (x^2+7x-4) = 14 \\ \lim_{x \to 2^+} (2x^2+3x) = 14 \end{cases} \to \lim_{x \to 2} g(x) = 14 = g(2) \to \text{Es continua también en } x = 2.$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2x+7 & \text{si } x<2 \\ 4x+3 & \text{si } x>2 \end{cases} \to f'(2^-) = 11 = f'(2^+) \to \text{Es derivable en } x = 2.$$

b) En el caso de $f(x)$:

$f'(x) = 0 \to 2x + 2 = 0 \to x = -1$ (pertenece al intervalo de definición)

$x = -1,\ y = -2,\ f''(-1) > 0 \to$ El punto $(-1, -2)$ es un mínimo relativo.

En el caso de $g(x)$:

$$g'(x) = 0 \to \begin{cases} 2x+7=0 \to x = -\frac{7}{2} & \text{(pertenece al intervalo de definición)} \\ 4x+3=0 \to x = -\frac{3}{4} & \text{(no vale porque no está en el intervalo de definición)} \end{cases}$$

$x = -\frac{7}{2},\ y = -\frac{65}{4},\ g''\left(-\frac{7}{2}\right) > 0 \to$ El punto $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{65}{4}\right)$ es un mínimo relativo.

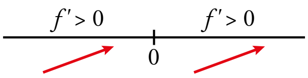
16 **Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x|x|$. ¿Tiene máximos o mínimos?**

Determina los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Tiene algún punto de inflexión?

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases} \to \text{Es una función continua en } \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x<0 \\ 2x & \text{si } x>0 \end{cases},\ f'(0^-) = 0 = f'(0^+) \to \text{También es derivable en } x = 0.$$

La primera derivada solo se anula cuando $x = 0$.



La función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x>0 \end{cases} \to \text{Es convexa en el intervalo } (-\infty, 0) \text{ y cóncava en } (0, +\infty).$$

El punto $(0, 0)$ es un punto de inflexión porque cambia de convexa a cóncava.

Página 298

Funciones dependientes de parámetros

17 **Dada la función $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$, calcula a sabiendo que $f(x)$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$. ¿Se trata de un máximo o un mínimo?**

Como tiene un extremo relativo en $x = 3$ debe cumplirse que $f'(3) = 0$.

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{12}{x^3}$$

$$f'(3) = 0 \to -\frac{a}{9} - \frac{12}{27} = 0 \to a = -4$$

Por tanto, $f(x) = 1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}$.

$f'(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{12}{x^3}$; $f''(x) = -\frac{8}{x^3} + \frac{36}{x^4}$

$x = 3$, $f(3) = \frac{1}{3}$, $f''(3) = -\frac{8}{27} + \frac{36}{81} = \frac{4}{27} > 0 \to$ El punto $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ es un mínimo relativo.

18 **De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por (1, 1) y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$. Halla a y b.**

$f(x) = ax^3 + bx$; $f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1 \to a+b=1 \\ f'(1)=-3 \to 3a+b=-3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a=-2 \\ b=3 \end{array}\right\} f(x) = -2x^3 + 3x$$

19 **Halla una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en $P(1, 2)$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f(1) = 2 \to 1 + a + b + c = 2$

$f''(1) = 0 \to 6 + 2a = 0$

$f'(2) = 0 \to 3 + 2a + b = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 1+a+b+c=2 \\ 6+2a=0 \\ 3+2a+b=0 \end{array}\right\} \to a = -3,\ b = 3,\ c = 1$$

20 **Calcula los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$, sabiendo que:**

a) La ecuación de la recta tangente a f en $x = 0$ es $y = x$.

b) Tiene un extremo relativo en el punto (–1, 0).

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

Del apartado a) se deduce que pasa por el punto (0, 0) y que $f'(0) = 1$.

El apartado b) implica que $f(-1) = 0$ y que $f'(-1) = 0$.

$f'(0) = 1 \to c = 1$

$f(-1) = 0 \to 1 - a + b - 1 = 0 \to -a + b = 0$

$f'(-1) = 0 \to -4 + 3a - 2b + 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} -a+b=0 \\ -4+3a-2b+1=0 \end{array}\right\} \to a = 3,\ b = 3$$

21 **Halla a, b, c y d para que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en el punto (0, 4) y un mínimo relativo en el punto (2, 0).**

Las condiciones del problema implican que:

$f(0) = 4$, $f'(0) = 0$, $f(2) = 0$, $f'(2) = 0$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$d = 4$

$c = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 8a+4b+4=0 \\ 12a+4b=0 \end{array}\right\} \to a = 1,\ b = -3$$

22 **Las funciones $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ y $g(x) = x - cx^2$ pasan por el punto (1, 0). Determina los coeficientes a, b y c para que tengan la misma recta tangente en dicho punto y calcúlala.**

$f(x)$ pasa por $(1, 0) \to 1 + a + b = 0$ (1)

$g(x)$ pasa por $(1, 0) \to 1 - c = 0$ (2)

$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b$

$g'(x) = 1 - 2cx$

Tienen la misma recta tangente en (1, 0):

$f'(1) = g'(1) \to 4 + 2a + b = 1 - 2c$ (3)

El sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3) tiene solución: $a = -4$, $b = 3$, $c = 1$

Calculamos ahora la recta tangente común utilizando, por ejemplo $f(x)$:

$f'(1) = 4 - 8 + 3 = -1$

Por tanto, la recta tangente es: $y - 0 = f'(1)\,(x - 1) \to y = -x + 1$

23 **Dada la función $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula los valores de a y b sabiendo que tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = 1$ y otro en $x = 1/2$.**

$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$

$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$

$$\left.\begin{array}{l} f''(1) = 0 \quad \to \quad 12a + 18b - 6 = 0 \\ f''(1/2) = 0 \quad \to \quad 3a + 9b - 6 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2a + 3b - 1 = 0 \\ a + 3b - 2 = 0 \end{array}\Bigg\}$$

Restando las igualdades: $a + 1 = 0 \;\to\; a = -1$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación: $3b - 3 = 0 \;\to\; b = 1$

24 **La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en el punto (2, 1). Calcula a, b y c.**

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 0 \;\to\; -1 + a - b + c = 0 \\ f(2) = 1 \;\to\; 8 + 4a + 2b + c = 1 \\ f''(2) = 0 \;\to\; 12 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -7 \\ a = -6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -6 \\ b = \dfrac{10}{3} \\ c = \dfrac{31}{3} \end{array}\right\}$$

25 **Sabiendo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \;\to\; 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \;\to\; 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 \;\to\; 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{array}\right\} \to f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

26 **Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Halla a y b para que la curva $y = f(x)$ tenga en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.**

Si la curva tiene un punto de inflexión en $x = 1$, debe ser $f''(1) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \to f''(x) = 6x + 2a \to f''(1) = 6 \cdot 1 + 2a \to 6 + 2a = 0$

Si en $x = 1$ la tangente es horizontal, su pendiente será 0; y, por tanto, $f'(1) = 0$.

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 3 + 2a + b = 0$

Resolvemos: $\begin{cases} 6 + 2a = 0 \to a = -3 \\ 3 + 2a + b = 0 \to b = -3 - 2(-3) = 3 \end{cases}$

La curva será $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$.

27 **Halla el valor de c de modo que la función $y = \dfrac{e^x}{x^2 + c}$ tenga un único punto crítico.**

¿Se trata de un máximo, de un mínimo o de un punto de inflexión?

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + c) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + c)^2} = \frac{e^x(x^2 + c - 2x)}{(x^2 + c)^2}$$

$$f'(x) = 0 \to x^2 - 2x + c = 0 \to x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4c}}{2}$$

Para que solo haya un punto crítico, ha de ser: $4 - 4c = 0 \to c = 1$

En este caso sería:

$$y = \frac{e^x}{x^2 + 1};\ f'(x) = \frac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \to x = 1$

$f'(x) > 0$ si $x \neq 1 \to f(x)$ es creciente si $x \neq 1$.

Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

28 **a) Calcula los valores de los parámetros a y b para que sea derivable la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Halla sus extremos relativos en el caso $a = -2$, $b = 1$.

a) La función está definida por intervalos mediante funciones continuas y derivables. Solo nos queda estudiar el punto $x = 0$. Veamos la continuidad de la función:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1 - x}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + ax + b) = b \end{cases} \to b = 1$$

Para el valor obtenido de b la función es continua porque $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2}{e^x} & \text{si } x < 0 \to f'(0^-) = -2 \\ 2x + a & \text{si } x > 0 \to f'(0^+) = a \end{cases} \to a = -2 \text{ para que sea derivable en } x = 0.$$

Si $a = -2$ y $b = 1$ la función es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{x-2}{e^x} = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \text{ (no vale)} \\ 2x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = 1 \end{cases}$

Estudiando el signo de la primera derivada en las proximidades de $x = 1$, obtenemos que el punto (1, 0) es un mínimo relativo.

Para resolver

29 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 - y^2 + 2x - 6 = 0$ en los puntos de ordenada $y = 3$.

Calculamos primero las abscisas de los puntos.

$x^2 - 9 + 2x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 3,\; x = -5$

Derivamos en forma implícita:

$2x - 2yy' + 2 = 0 \;\rightarrow\; x - yy' + 1 = 0 \;\rightarrow\; y' = \dfrac{x+1}{y}$

$x = -5,\; y = 3,\; y' = \dfrac{-5+1}{3} = -\dfrac{4}{3} \;\rightarrow$ Recta tangente: $y = 3 - \dfrac{4}{3}(x+5)$

$x = 3,\; y = 3,\; y' = \dfrac{3+1}{3} = \dfrac{4}{3} \;\rightarrow$ Recta tangente: $y = 3 + \dfrac{4}{3}(x-3)$

30 Determina los puntos de la circunferencia $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ en los que la recta tangente a ella es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

Para que la recta tangente sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante, la pendiente de la recta tangente debe ser 1.

Derivamos en forma implícita:

$2(x-3) + 2(y+2)y' = 0 \;\rightarrow\; y' = \dfrac{3-x}{y+2}$

$y' = 1 \;\rightarrow\; \dfrac{3-x}{y+2} = 1 \;\rightarrow\; 3 - x = y + 2 \;\rightarrow\; y = -x + 1$

Hallamos los puntos de la circunferencia que cumplen esta condición:

$$\left.\begin{array}{l} (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16 \\ y = -x + 1 \end{array}\right\} \;\rightarrow\; \text{Soluciones: } \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2\sqrt{2},\; y = -2 + 2\sqrt{2} \\ x = 3 + 2\sqrt{2},\; y = -2 - 2\sqrt{2} \end{array}\right\}$$

31 Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = arc\ tg\ \dfrac{x-1}{x+1}$ que es paralela a la recta $x - 2y + 3 = 0$.

$x - 2y + 3 = 0 \;\rightarrow\; y = \dfrac{x+3}{2}$ tiene pendiente $\dfrac{1}{2}$.

Igualamos la derivada a esta pendiente para que la recta tangente sea paralela a la recta dada.

$y' = \dfrac{1}{x^2+1}$

$y' = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; x = -1$ (no es un punto válido), $x = 1$

$x = 1,\; y = 0,\; y' = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; y = \dfrac{1}{2}(x-1)$

32 **Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = x^{x/2}$ en el punto de absicsa $x = e$.**

$$\ln y = \frac{x}{2} \ln x \;\rightarrow\; \frac{y'}{y} = \frac{1 + \ln x}{2} \;\rightarrow\; y' = x^{\frac{x}{2}} \frac{1 + \ln x}{2}$$

$$x = e,\;\; y = e^{\frac{e}{2}},\;\; y' = e^{\frac{e}{2}} \;\rightarrow\; y = e^{\frac{e}{2}} + e^{\frac{e}{2}}(x - e)$$

33 **Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa 2:**

$$f(x) = 2x - x^2 \qquad g(x) = x^2 - x - 2$$

- La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ es:

  $f'(x) = 2 - 2x \;\rightarrow\; f'(2) = -2$

- La pendiente de la recta tangente a $g(x)$ en $x = 2$ es:

  $g'(x) = 2x - 1 \;\rightarrow\; g'(2) = 3$

- El ángulo que forman las dos rectas será:

$$tg\,\alpha = \left|\frac{-2-3}{1-6}\right| = 1 \;\rightarrow\; \alpha = 45°$$

34 **Dada la función $f(x) = |x - 3|(x + 1)$, halla los puntos donde las tangentes son paralelas a la recta $y = 6x - 2$.**

$$f(x) = \begin{cases} -(x-3)(x+1) & \text{si } x < 3 \\ (x-3)(x+1) & \text{si } x \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La función no es derivable en $x = 3$ porque las derivadas laterales son distintas.

$$f'(x) = 6 \;\rightarrow\; \begin{cases} -2x + 2 = 6 \;\rightarrow\; x = -2 \\ 2x - 2 = 6 \;\rightarrow\; x = 4 \end{cases}$$

$x = -2,\;\; y = -5$

$x = 4,\;\; y = 5$

Los puntos buscados son $(-2, -5)$ y $(4, 5)$.

35 **Dada la función $f(x) = 4 - x^2$ se pide:**

a) El punto de esa curva en el que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos (–1, 3) y (2, 0).

b) Las rectas que pasan por el punto (–2, 1) y son tangentes a la curva.

a) La cuerda que une los puntos dados tiene pendiente $m = \dfrac{0-3}{2-(-1)} = -1$.

$f'(x) = -2x$

$f'(x) = -1 \;\rightarrow\; -2x = -1 \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{2},\;\; y = \dfrac{15}{4}$

La solución es el punto $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{15}{4}\right)$.

b) El punto $(-2, 1)$ no pertenece a la curva. Debemos calcular las tangentes a la curva desde un punto exterior.

Un punto genérico de la curva es de la forma $(a, 4 - a^2)$. La pendiente de la recta que pasa por este punto y el $(-2, 1)$ es $m = \dfrac{4 - a^2 - 1}{a - (-2)} = \dfrac{3 - a^2}{a + 2}$.

Así $\dfrac{3-a^2}{a+2} = -2a \;\rightarrow\; 3-a^2 = -2a(a+2) \;\rightarrow\; a = -3,\; a = -1$

Tenemos dos rectas tangentes:

$$\left.\begin{array}{l} x = -3 \;\rightarrow\; f'(-3) = 6 \;\rightarrow\; y = 1 + 6(x+2) \\ x = -1 \;\rightarrow\; f'(-1) = 2 \;\rightarrow\; y = 1 + 2(x+2) \end{array}\right\}$$

36 Halla la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ con pendiente mínima.

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = -2,\; x = 0$

Buscamos el punto en el que la pendiente $f'(x)$ es mínima. Para ello volvemos a derivar:

$f''(x) = 6x + 6$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = -1$

En el punto de abscisa $x = -1, f'(x)$ tiene un extremo. Si volvemos a derivar, $f''(x) = 6 > 0$, por tanto, vemos que $x = -1$ es efectivamente, la abscisa del punto en el que la pendiente es mínima.

La recta tangente es: $y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \rightarrow y - 1 = -3(x+1)$

37 Dada la curva $y = \dfrac{1}{3+x^2}$:

a) Expresa la función $m(x)$ que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto x.

b) Calcula el valor de x donde se alcanza la máxima pendiente.

a) $m(x) = f'(x) = -\dfrac{2x}{(3+x^2)^2}$

b) $m'(x) = f''(x) = \dfrac{6(x^2-1)}{(3+x^2)^3}$

$m'(x) = 0 \rightarrow x = 1,\; x = -1$

Veamos si estos valores son máximos o mínimos:

$m''(x) = f'''(x) = -\dfrac{24x(x^2-3)}{(3+x^2)^4}$

$m''(1) = \dfrac{3}{16} > 0 \rightarrow m(x)$ alcanza un mínimo en $x = 1$.

$m''(-1) = -\dfrac{3}{16} < 0 \rightarrow m(x)$ alcanza un máximo en $x = -1$.

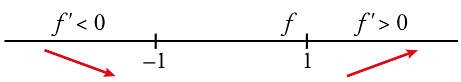
38 Halla el dominio de definición y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

La función está definida cuando $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} > 0$. Como el denominador es siempre positivo, debe ser $x^2 - 1 > 0$. Por tanto el dominio de definición es $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

$f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (este punto no es válido porque no está en el dominio de definición).



La función es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(1, +\infty)$.

39 **Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y los mínimos de la función dada por:**

$$y = |x^2 + 2x - 3|$$

Definimos la función por intervalos. Para ello, calculamos los puntos donde $f(x) = 0$:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallamos la derivada de f:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -3 \\ -2x - 2 & \text{si } -3 \le x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no es derivable, pues $f'(-3^-) = -4 \ne f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no es derivable, pues $f'(1^-) = -4 \ne f'(1^+) = 4$.

- Veamos dónde se anula la derivada:

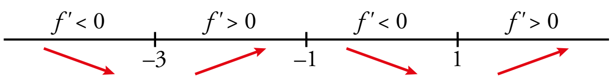
  $2x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$

  Pero $f'(x) = 2x + 2$ para $x < -3$ y $x > 1$.

  $-2x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$ y $f'(x) = -2x - 2$ para $-3 < x < 1$

  Por tanto, $f'(x)$ se anula en $x = -1 \;\rightarrow\; f(-1) = 4$.

- Signo de la derivada:



- La función: es creciente en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$.

  es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$.

  tiene un máximo en $(-1, 4)$.

  tiene un mínimo en $(-3, 0)$ y otro en $(1, 0)$. Son los puntos donde f no es derivable.

40 **Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función** $y = |x^2 - 4|$.

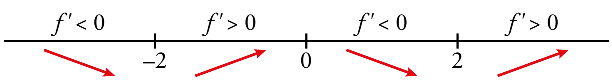
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no es derivable, pues $f'(-2^-) = -4 \ne f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no es derivable, pues $f'(2^-) = -4 \ne f'(2^+) = 4$.

- La derivada se anula en $x = 0$.
- Signo de la derivada:



- La función tiene un máximo relativo en $(0, 4)$.

  No tiene máximo absoluto $\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \right)$.

- Tiene un mínimo relativo en $(-2, 0)$ y otro en $(2, 0)$. En estos puntos, el mínimo también es absoluto, puesto que $f(x) \ge 0$ para todo x.

Página 299

41 **Halla el valor que debe tener a para que la función $f(x) = x^2 \ln \frac{x}{a}$, $a > 0$, tenga un punto singular en $x = e$.**

El dominio de definición es $(0, +\infty)$ por ser a positivo.

$$f'(x) = x + 2x \ln \frac{x}{a}$$

Para que tenga un punto singular en $x = e$ debe ser $f'(e) = 0$

$$e + 2e \cdot \ln \frac{e}{a} = 0 \to e\left(1 + 2\ln \frac{e}{a}\right) = 0 \to 1 + 2(\ln e - \ln a) = 0 \to 1 + 2 - 2\ln a = 0 \to \ln a = \frac{3}{2}$$

$a = e^{3/2}$

42 **Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \le 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.**

Determina a, b y c para que sea continua, tenga un máximo en $x = -1$ y la tangente en $x = -2$ sea paralela a la recta $y = 2x$.

La función está definida por intervalos mediante funciones continuas. Exigimos la continuidad en $x = 0$ y así será continua en $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to 0^-} (ax^2 + bx + c) = c$$

$$\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ (indeterminado).}$$

Usando la regla de L'Hôpital $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$.

Luego $\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$.

Por tanto, para que sea continua $c = 0$.

Si $x < 0$, $f'(x) = 2ax + b$

Por tener un máximo en $x = -1$, $f'(-1) = 0 \to -2a + b = 0 \to b = 2a$

Para que la tangente en $x = -2$ sea paralela a la recta $y = 2x$, debe ser $f'(2) = 2 \to -4a + b = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} b = 2a \\ -4a + b = 2 \end{array}\right\} \to a = -1, \; b = -2$$

43 **a) Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si } x \le 1 \\ x^2 + mx + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

calcula los valores de m, n y p para que f sea derivable en $\mathbb{R}$ y tenga un extremo relativo en $x = -\frac{1}{2}$.

b) ¿Es un máximo o un mínimo?

c) Comprueba si existen otros puntos singulares y representa la función.

a) La función está definida por intervalos mediante funciones polinómicas, luego es continua y derivable salvo, quizás, en el punto.

Estudiamos el punto $x = 1$.

Continuidad:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^+} (-x^2 + px) = -1 + p \\ \lim_{x \to 1^-} (x^2 + mx + n) = 1 + m + n \end{array}\right\} \to -1 + p = 1 + m + n \to m + n - p = -2$$

Si se cumple la condición anterior la función será continua en $x = 1$ porque $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + p & \text{si } x < 1 \\ 2x + m & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = -2 + p \\ f'(1^+) = 2 + m \end{cases} \rightarrow -2 + p = 2 + m \rightarrow m - p = -4$$

Si se cumple la condición anterior la función será derivable en $x = 1$ al coincidir las derivadas laterales.

Para que tenga un extremo relativo en $x = -\frac{1}{2}$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow 1 + p = 0 \rightarrow p = -1$.

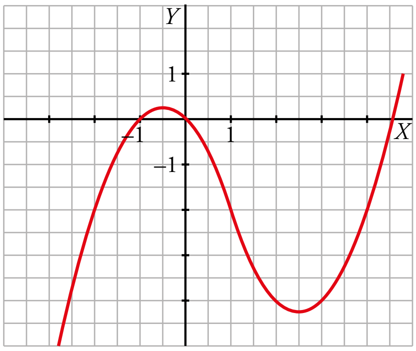
$$\left.\begin{array}{l} p = -1 \\ m - p = -4 \\ m + n - p = -2 \end{array}\right\} \rightarrow m = -5, \ n = 2, \ p = -1$$

b) $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 < 0 \rightarrow$ El extremo relativo es un máximo.

c) Si existe otro extremo relativo, debe estar en el segundo intervalo.

$f'(x) = 0 \ (x > 1) \rightarrow 2x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$

$f''\left(\frac{5}{2}\right) = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = \frac{5}{2}$ hay un mínimo relativo.



44 **Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ a\sqrt{b - x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.**

a) Determina el valor de a y b sabiendo que $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) ¿Tiene puntos singulares?

a) Exigimos la continuidad y derivabilidad en $x = 0$.

Veamos la continuidad:

$\lim\limits_{x \to 0^-} (x + 2e^{-x}) = 2$

$\lim\limits_{x \to 0^+} a\sqrt{b - x} = a\sqrt{b}$

Cuando $a\sqrt{b} = 2$, la función es continua ya que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Veamos la derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-a}{2\sqrt{b - x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = \dfrac{-a}{2\sqrt{b}} \end{cases} \rightarrow -1 = \frac{-a}{2\sqrt{b}}$$

Si se cumple la condición anterior será derivable en $x = 0$ ya que coinciden sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} a\sqrt{b} = 2 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{b}} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow a = 2, \ b = 1$$

La función queda así: $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ 2\sqrt{1-x} & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{1-x}} & \text{si } 0 \le x < 1 \end{cases}$

b) Los puntos singulares solo pueden estar en el primer trozo ya que la derivada no se anula cuando $x \ge 0$.

$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - 2e^{-x} = 0 \rightarrow x = \ln 2 > 0$ (este punto no es válido porque no pertenece al intervalo de definición)

Luego no tiene puntos singulares.

45 **Halla los puntos de la parábola $y = x^2 - 1$ que se encuentran a distancia mínima del punto $A\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$.**

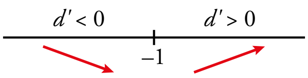
La distancia entre el punto $A\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$ y un punto $P(x, x^2 - 1)$ de la parábola es:

$$|\overrightarrow{AP}| = d(x) = \sqrt{(x+2)^2 + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^4 + 16x + 17}$$

Buscamos los que minimizan la distancia:

$$d'(x) = \frac{4x^3 + 4}{\sqrt{4x^4 + 16x + 17}}$$

$d'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 + 4 = 0 \rightarrow x = -1$



$x = -1,\ y = 0 \rightarrow$ En el punto $(-1, 0)$ se alcanza la mínima distancia.

46 **Calcula los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = x^2 + |x - 2|$ **b)** $f(x) = 3e^{-2|x|}$

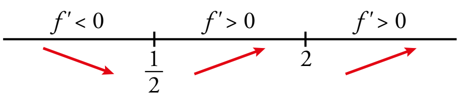
a) $|x - 2| = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + x - 2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

La función no es derivable en $x = 2$ ya que las derivadas laterales en dicho punto no coinciden.

$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2} \\ 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{1}{2} \text{ (este punto no vale)} \end{cases}$

La tabla de los signos de la primera derivada es:



La función es decreciente en $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

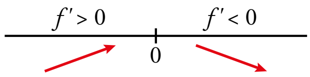
$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow f(x)$ es cóncava en $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \begin{cases} 3e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ 3e^{-2x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 6e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ -6e^{-2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

La función no es derivable en $x = 0$ porque las derivadas laterales en dicho punto no coinciden.

La primera derivada nunca se anula. Por tanto, su tabla de los signos es:



Es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

$f'(x) = \begin{cases} 12e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ 12e^{-2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Como la segunda derivada es positiva, es cóncava en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$.

47 Calcula el máximo y el mínimo absolutos en el intervalo [–2, 3] de la función:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + (x - 3)$$

La función dada es continua en el intervalo [–2, 3] luego alcanza su máximo y su mínimo absoluto. Estos pueden ser los extremos del intervalo o los máximos y mínimos relativos.

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} + 1$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ \dfrac{2x}{x^2+1} + 1 = 0 \ \rightarrow\ x = -1$

Evaluamos:

$x = -2,\ f(-2) = \ln 5 - 5 \approx -3{,}39$

$x = -1,\ f(-1) = \ln 2 - 4 \approx -3{,}31$

$x = 3,\ f(3) = \ln 10$

Su mínimo absoluto es el punto $(-2, \ln 5 - 5)$ y su máximo absoluto es el punto $(3, \ln 10)$.

48 a) Siendo $h(x)$ la suma de las coordenadas del punto $P(x, f(x))$ de la gráfica de $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$. Calcula los extremos relativos de $h(x)$.

b) ¿Tiene $h(x)$ algún extremo absoluto?

a) $h(x) = x + f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$h'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x$

$h'(x) = 0 \ \rightarrow\ 4x^3 + 3x^2 + 2x = 0 \ \rightarrow\ x = 0$

$h''(x) = 12x^2 + 6x + 2$

$h''(0) = 2 > 0 \ \rightarrow$ En $x = 0$ hay un mínimo relativo.

$x = 0,\ h(0) = 1 \ \rightarrow$ El mínimo relativo es (0, 1).

b) El mínimo relativo es necesariamente un mínimo absoluto porque la función siempre decrece a su izquierda y siempre crece a su derecha.

49 El punto $P(x, y)$ recorre la elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Deduce las posiciones del punto P para las que su distancia al punto (0, 0) es máxima y también aquellas para las que su distancia es mínima.

La distancia entre $P(x, y)$ de la elipse y el origen de coordenadas es $d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Está definida para valores de x en el intervalo [–5, 5] y de y en el intervalo [–3, 3]. (Si x o y tomaran valores fuera de esos intervalos, no se cumpliría la ecuación de la elipse).

Usando la derivación implícita:

$$d' = \frac{2x + 2yy'}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Por otro lado, derivando implícitamente la ecuación de la elipse:

$$\frac{2x}{25} + \frac{2yy'}{9} = 0 \rightarrow \frac{yy'}{9} = -\frac{x}{25} \rightarrow y' = -\frac{9x}{25y}$$

Sustituyendo en la expresión de la derivada:

$$d' = \frac{xyy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x + y\left(-\frac{9x}{25y}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{16}{25}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$d' = 0 \rightarrow x = 0$$

Por tanto, las distancias máximas o mínimas se pueden alcanzar en los extremos $x = -5$, $x = 5$ o en el punto singular $x = 0$.

Calculamos las ordenadas de los puntos:

$$x = -5 \rightarrow 1 + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow y = 0$$

$$x = 5 \rightarrow 1 + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow y = 0$$

$$x = 0 \rightarrow 0 + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow y = -3,\ y = 3$$

Evaluamos en los cuatro puntos obtenidos:

$x = -5,\ y = 0 \rightarrow d = 5$

$x = 5,\ y = 0 \rightarrow d = 5$

$x = 0,\ y = -3 \rightarrow d = 3$

$x = 0,\ y = 3 \rightarrow d = 3$

La distancia máxima se alcanza en los puntos (–5, 0) y (5, 0).

La distancia mínima se alcanza en los puntos (0, –3) y (0, 3).

NOTA. Gráficamente es muy sencillo comprobar estos resultados porque la elipse dada está centrada en el origen, su semieje mayor mide 5 unidades y su semieje menor, 3. La distancia máxima se alcanza en los extremos del eje mayor y la mínima en los extremos del eje menor.

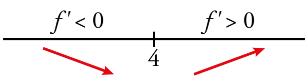
50 Sean x e y dos números positivos cuyo producto vale 16. ¿Puede $x + y$ ser menor que 7? Razona la respuesta.

Supongamos que $xy = 16$ con $x, y > 0 \rightarrow y = \frac{16}{x}$ con $x > 0$.

Consideremos que la función $f(x) = x + \frac{16}{x}$, que es continua y derivable en $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2}$$

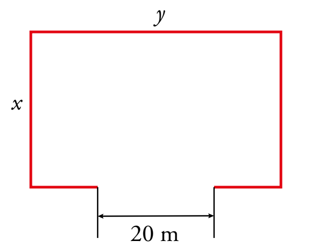
$$1 - \frac{16}{x^2} = 0 \rightarrow x = 4$$



$x = 4,\ f(4) = 8 \rightarrow (4, 8)$ es el mínimo absoluto de la función en $(0, +\infty)$.

Así la suma mínima es 8 y, por tanto, no puede ser menor que 7.

51 **Se desea vallar un terreno rectangular usando 100 m de una tela metálica. Se ha decidido dejar una abertura de 20 m sin vallar en uno de los lados de la parcela para colocar una puerta. Calcula las dimensiones de todos los lados de la parcela rectangular de área máxima que puede vallarse de esa manera. Calcula también el valor de dicha área máxima.**



Según los datos del enunciado:

$2x + y + y - 20 = 100 \;\rightarrow\; x = 60 - y$

Por otra parte:

Área $= A = xy = (60 - y)y = 60y - y^2$

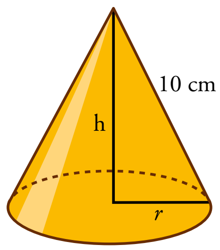
$A' = 60 - 2y = 0 \;\rightarrow\; y = 30$

Si volvemos a derivar vemos que la segunda derivada es $A'' = -2 < 0$ para cualquier x y que, por tanto, en $y = 30$ la función alcanza un máximo.

Por tanto, las dimensiones del terreno deberán ser $y = 30$ m y $x = 60 - 30 = 30$ m.

El área máxima es de $30^2 = 900$ m^2.

52 **Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?**



$10^2 = r^2 + h^2 \;\rightarrow\; r = \sqrt{10^2 - h^2}$ (descartamos la raíz negativa al estar tratando con longitudes).

Volumen $= V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \dfrac{\pi(10^2 - h^2)h}{3} = \dfrac{\pi(100 - h^3)}{3}$

Por tanto:

$V' = \dfrac{\pi(100 - 3h^2)}{3} = 0 \;\rightarrow\; h = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$

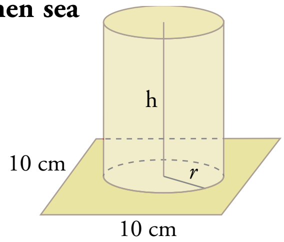
$V'' = -2\pi h$

El valor de la segunda derivada es negativo cuando $h = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$, por tanto, para este valor de h se alcanza el volumen máximo.

Finalmente:

$r = \sqrt{100 - \dfrac{100}{3}} = 10\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ cm

53 **En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es 50 cm^2. ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su volumen sea máximo?**



El área lateral del cilindro es 50, por tanto:

$2\pi rh = 50 \rightarrow h = \dfrac{50}{2\pi r}$

Volumen $= V = \pi r^2 h = \pi r^2 \dfrac{50}{2\pi r} = 25r$

$V' = 25 > 0$ para todo r.

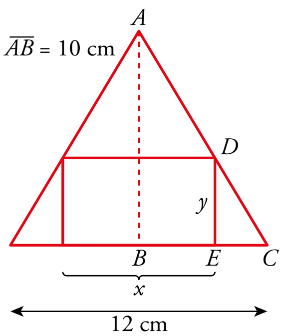
El volumen es creciente. El radio para el que volumen es máximo lo marcan entonces las dimensiones del cuadrado. Por tanto, el radio que buscamos es $r = 10 : 2 = 5$ cm.

54 **En un triángulo isósceles de base 12 cm (el lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales:**

a) Expresa el área, A, del rectángulo en función de su base, x, y di cuál es el dominio de la función.

b) Halla el valor máximo de esa función.

a)



Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{DEC}$ son semejantes; luego:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$$

Como: $\overline{AB} = 10$ cm $\quad \overline{DE} = y \quad \overline{BC} = 6$ cm $\quad \overline{EC} = \dfrac{12 - x}{2}$

Tenemos que:

$$\frac{10}{y} = \frac{6}{\frac{12 - x}{2}} \rightarrow \frac{10}{y} = \frac{2}{12 - x}$$

$10(12 - x) = 12y \rightarrow y = \dfrac{10(12 - x)}{12} = \dfrac{5(12 - x)}{6} = \dfrac{60 - 5x}{6}$

Por tanto, el área del rectángulo es:

$A = x \cdot y = x \cdot \dfrac{(60 - 5x)}{6} = \dfrac{60x - 5x^2}{6} \rightarrow A(x) = \dfrac{60x - 5x^2}{6}$

x puede tomar valores entre 0 y 12. Por tanto, el dominio de $A(x)$ es:

Dominio = (0, 12)

b) Hallamos el máximo de $A(x)$:

$A'(x) = \dfrac{60 - 10x}{6}$

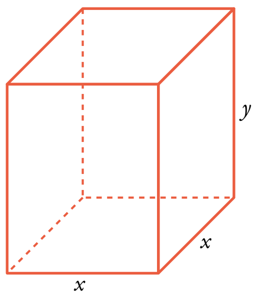
$A'(x) = 0 \rightarrow 60 - 10x = 0 \rightarrow x = 6 \rightarrow y = 5$

(En $x = 6$ hay un máximo, pues $A'(x) > 0$ para $x < 6$ y $A'(x) < 0$ para $x > 6$).

El máximo de la función $A(x)$ se alcanza en $x = 6$, que corresponde al rectángulo de base 6 cm y altura 5 cm. En este caso, el área es de 30 cm^2 (que es el área máxima).

55 Meta 7.3. **[El visionado del vídeo puede motivar un debate entre el alumnado sobre los peligros de no mejorar la eficiencia energética].**

Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm³. Para la tapa y la superficie lateral, usamos un determinado material, pero para la base, debemos emplear un material un 50 % más caro. Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.



$Volumen = x^2y = 80 \text{ cm}^3 \rightarrow y = \frac{80}{x^2}$

Para la tapa y el lateral $\rightarrow$ z €/cm²

Para la base $\rightarrow$ $1{,}5z$ €/cm²

El precio total será:

$$P = z(x^2 + 4xy) + 1{,}5z(x^2) = z\left(x^2 + 4x \cdot \frac{80}{x^2}\right) + 1{,}5x^2z =$$

$$= z\left(x^2 + \frac{320}{x}\right) + 1{,}5x^2z = z\left(x^2 + \frac{320}{x} + 1{,}5x^2\right) = z\left(2{,}5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

Tenemos que minimizar la función que nos da el precio:

$$P(x) = z\left(2{,}5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

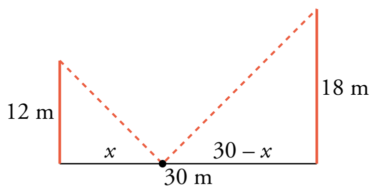
$$P'(x) = z\left(5x - \frac{320}{x^2}\right) = z\left(\frac{5x^3 - 320}{x^2}\right)$$

$$P'(x) = 0 \rightarrow 5x^3 - 320 = 0 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 5$$

(En $x = 4$ hay un mínimo, pues $P'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $P'(x) > 0$ a su derecha).

El envase debe tener la base cuadrada de lado 4 cm y 5 cm de altura.

56 **Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?**



La longitud total del cable es:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{(30 - x)^2 + 18^2}; \text{ es decir: } L(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,224};$$

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{2x - 60}{2\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144}}{\sqrt{(x^2 + 144)(x^2 - 60x + 1\,224)}}$$

$$L'(x) = 0 \rightarrow x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144} = 0$$

$$x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} = -(x - 30)\sqrt{x^2 + 144}$$

$$x^2(x^2 - 60x + 1\,224) = (x - 30)(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = (x^2 - 60x + 900)(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = x^4 + 144x^2 - 60x^3 - 8\,640x + 900x^2 + 129\,600$$

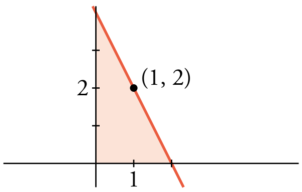
$$180x^2 + 8\,640x - 129\,600 = 0 \rightarrow x^2 + 48x - 720 = 0$$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{2\,304 + 2\,880}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{5\,184}}{2} = \frac{-48 \pm 72}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = -60 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

(En $x = 12$ hay un mínimo, pues $L'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $L'(x) > 0$ a su derecha).

Por tanto, el punto del suelo debe situarse a 12 m del poste de 12 m (y a 18 m del poste de 18 m).

57 De todas las rectas que pasan por el punto (1, 2), encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.



Las rectas que pasan por el punto (1, 2) son de la forma:

$y = 2 + m(x - 1)$

Hallamos los puntos de corte con los ejes de la recta:

• Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 2 - m \to$ Punto $(0, 2 - m)$

• Con el eje $X \to y = 0 \to x = 1 - \frac{2}{m} \to$ Punto $\left(1 - \frac{2}{m}, 0\right)$

El área del triángulo es:

$$A(m) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{m}\right)(2 - m) = \frac{1}{2}\left(2 - m - \frac{4}{m} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(4 - m - \frac{4}{m}\right)$$

Hallamos el mínimo de la función:

$$A'(m) = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{4}{m^2}\right) = \frac{-m^2 + 4}{2m^2}$$

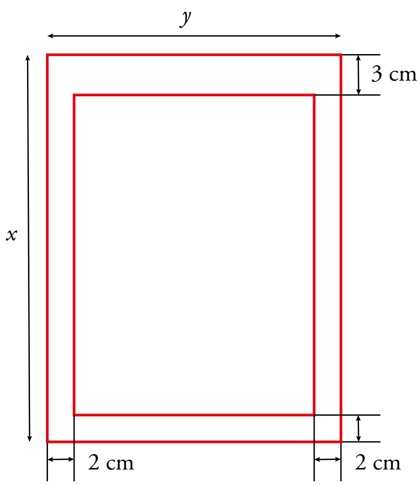
$$A'(m) = 0 \to -m^2 + 4 = 0 \begin{cases} m = 2 \text{ (no vale)} \\ m = -2 \end{cases}$$

($m = 2$ no vale, pues no formará un triángulo en el primer cuadrante la recta con los ejes).

(En $m = -2$ hay un mínimo, pues $A'(m) < 0$ a la izquierda de ese valor y $A'(m) > 0$ a su derecha).

Por tanto, la recta es: $y = 2 - 2(x - 1)$; es decir: $y = -2x + 4$

58 Cada una de las páginas de un libro debe tener 600 cm² de superficie, con los márgenes alrededor del texto de 2 cm en la parte inferior, 3 cm en la parte superior y 2 cm a cada lado. Calcula las dimensiones de la página que permiten que la superficie impresa sea lo más grande posible.



$xy = 600 \to y = \frac{600}{x}$

La superficie imprimible es:

$$A = (x - 5)(y - 4) = xy - 4x - 5y + 20 =$$

$$= 600 - 4x - \frac{3\,000}{x} + 20 = 620 - 4x - \frac{3\,000}{x}$$

$$A' = -4 + \frac{3\,000}{x^2} = 0 \to x = 5\sqrt{30}$$

$$A'' = -\frac{6\,000}{x^3}$$

Si $x = 5\sqrt{30}$, $A'' < 0$, por tanto, en el punto de abscisa $x = 5\sqrt{30}$, la función alcanza un máximo.

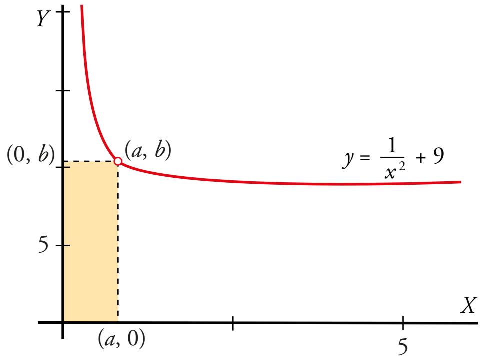
Si $x = 5\sqrt{30}$: $y = \frac{600}{5\sqrt{30}} = 4\sqrt{30}$

Por tanto, las dimensiones de la página deben ser $x = 5\sqrt{30}$ cm e $y = 4\sqrt{30}$ cm.

Página 300

59 Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos (0, 0), (a, 0), (0, b) y (a, b), donde $a > 0$, $b > 0$ y, además, el punto (a, b) está situado en la curva de ecuación $y = \frac{1}{x^2} + 9$.

De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones, determina el rectángulo de área mínima y calcula dicha área mínima.



Tenemos la igualdad: $b = \frac{1}{a^2} + 9$

Área $= A = ab = a\left(\frac{1}{a^2} + 9\right) = \frac{1}{a} + 9a$

$A' = 9 - \frac{1}{a^2} = 0 \to a = \frac{1}{3}$

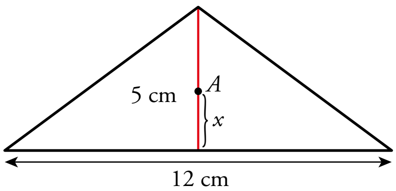
$A'' = \frac{2}{a^3} \to A'' > 0$ cuando $a = \frac{1}{3}$, por tanto, para este valor de a, la función alcanza un mínimo.

Buscamos ahora el valor de b:

$b = \frac{1}{a^2} + 9 = \frac{1}{(1/3)^2} + 9 = 18$

El área mínima se alcanza cuando $a = \frac{1}{3}$ y $b = 18$. Dicha área será de 6 u^2.

60 Considera un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base, de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observa la figura:



a) Demuestra que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$.

b) Calcula el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.

c) Calcula dicha cantidad mínima.

a) Distancia de A a los vértices de la base: $\sqrt{36 + x^2}$

Distancia de A al vértice superior: $5 - x$

La suma de las tres distancias es $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{36 + x^2}$

b) $f'(x) = -1 + \frac{2x}{\sqrt{36 + x^2}} = 0 \to \frac{-\sqrt{36 + x^2} + 2x}{\sqrt{36 + x^2}} = 0 \to \sqrt{36 + x^2} = 2x \to 36 + x^2 = 4x^2 \to$

$\to x^2 = 12 \to x = 2\sqrt{3}$

$f''(x) = \frac{72}{(36 + x^2)^{3/2}}$

La segunda derivada es positiva para cualquier valor de x, por tanto, en $x = 2\sqrt{3}$ se alcanza un mínimo de la función.

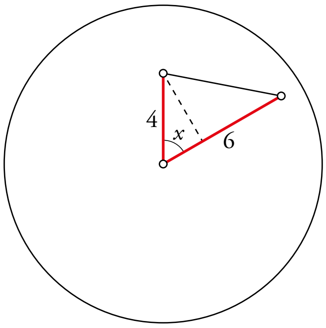
c) $f(2\sqrt{3}) = 5 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{36 + 12} = 5 - 2\sqrt{3} + 2 \cdot 2\sqrt{48} = 5 + 6\sqrt{3}$

61 Las manecillas de un reloj miden 4 cm y 6 cm; uniendo sus extremos se forma un triángulo.

a) Demuestra que el área de ese triángulo viene dada por $A(x) = 12 sen\, x$, donde x es el ángulo que forman las manecillas.

b) Halla x para que el área del triángulo sea máxima y calcula dicha área.

a)



Si llamamos x al ángulo que forman las manecillas, la altura del triángulo sobre la manecilla mayor es $a = 4\, sen\, x$.

El área del triángulo es $A(x) = \dfrac{6 \cdot 4\, sen\, x}{2} = 12\, sen\, x$, con $x \in (0, \pi)$ para que se pueda construir el mismo.

b) $A'(x) = 12\, cosx$

$A'(x) = 0 \to 12\, cos\, x = 0 \to x = \dfrac{\pi}{2}$

$A''(x) = -12\, sen\, x$

$A''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -12 < 0 \to x = \dfrac{\pi}{2},\ A\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 12$ es el máximo relativo.

Las manecillas deben ser perpendiculares para que el área sea máxima y ésta es de 12 cm^2.

62 La velocidad de una partícula en m/s, viene dada por la función $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$ con $t \geq 0$.

a) ¿En qué instante del intervalo [0, 3] se alcanza la velocidad máxima?

b) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} v(t)$ e interpreta el resultado.

a) $v(0) = 0$ m/s

$v(3) = 15/e^3 = 0{,}75$ m/s

Vamos a ver ahora si tiene máximos o mínimos en el interior del intervalo:

$v'(t) = -(t^2 - 2)e^{-t} = 0 \to t^2 - 2 = 0 \to t = \sqrt{2}$ (no consideramos la raíz negativa).

$t = \sqrt{2}$ está en el intervalo (0, 3) por tanto, calculamos la velocidad de la partícula en ese instante.

$v(\sqrt{2}) = (2 + \sqrt{2})\, e^{-\sqrt{2}} = 1{,}17$ m/s

El mínimo se alcanza en el instante $t = 0$ s y el máximo en el instante $t = \sqrt{2}$ s.

b) $(t^2 + 2t)e^{-t} = \dfrac{t^2 + 2t}{e^t}$

El numerador es una función polinómica y el denominador es una función exponencial de exponente positivo (un infinito de orden superior), por tanto, la función tiende a 0 cuando $t \to +\infty$. Esto quiere decir que la partícula tiende al reposo con el paso del tiempo.

63 Dada f: [1, e] $\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} + ln\, x$, determina cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de f tienen la máxima pendiente.

La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es $f'(a)$. Tenemos que hallar el máximo de:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x},\ x \in [1, e]$$

Calculamos la derivada de $f'(x)$; es decir, $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2 - x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \to 2 - x = 0 \to x = 2 \in [1, e]$$

(En $x = 2$ hay un máximo relativo de $f'(x)$, pues $f''(x) > 0$ a la izquierda de ese valor y $f''(x) < 0$ a su derecha).

Hallamos $f'(x)$ en $x = 2$ y en los extremos del intervalo $[1, e]$:

$$f'(2) = \frac{1}{4} = 0{,}25;\ f'(1) = 0;\ f'(e) = \frac{e-1}{e^2} \approx 0{,}23$$

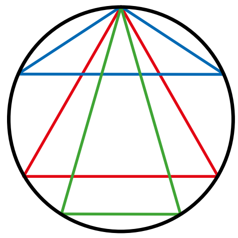
Por tanto, la recta tangente con pendiente máxima es la recta tengente en $x = 2$. La hallamos:

$$f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2;\ f'(2) = \frac{1}{4}$$

La recta es: $y = \frac{1}{2} + \ln 2 + \frac{1}{4}(x-2)$

64 Análisis asociativo. **[El docente puede plantear preguntas alrededor de la situación planteada por el problema para trabajar esta estrategia].**

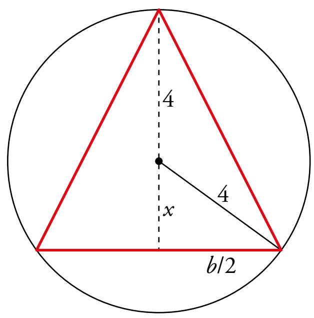
Calcula las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima, inscrito en una circunferencia de 4 m de radio.



Cada triángulo isósceles cuya base se encuentre por encima del diámetro horizontal se corresponde con otro que tiene la misma base y está situado por debajo del diámetro horizontal. El área de este segundo triángulo es necesariamente mayor que la del primero porque tiene la misma base y mayor altura. Por eso podemos limitarnos a los triángulos cuya base queda por debajo del diámetro horizontal.

Si llamamos x a la distancia del centro de la circunferencia a la base del triángulo y b a la medida de la base tenemos:

$$\frac{b}{2} = \sqrt{16-x^2} \ \to\ b = 2\sqrt{16-x^2} \quad \text{con } x \in [0, 4)$$



El área del triángulo es $A(x) = \dfrac{2\sqrt{16-x^2}\,(x+4)}{2} = \sqrt{16-x^2}\,(x+4)$.

$$A'(x) = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}(x+4) + \sqrt{16-x^2} = -2\frac{x^2+2x-8}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \ \to\ x^2 + 2x + 8 = 0 \ \to\ x = 2,\ x = -4 \ \text{(no vale)}$$

El área máxima se podrá dar en $x = 0$, por ser un extremo del intervalo, o en $x = 2$.

$$x = 0,\ A(0) = 16 \text{ cm}^2$$

$$x = 2,\ A(2) = 12\sqrt{3} \approx 20{,}785 \text{ cm}^2 \ \text{(área máxima)}$$

La base del triángulo mide $4\sqrt{3}$ cm y la altura, 6 cm.

Cuestiones teóricas

65 **Comprueba que $f(x) = x^3 - 18x$, definida en el intervalo $[0, 3\sqrt{2}]$, verifica las hipótesis del teorema de Rolle y encuentra el valor $c \in (0, 3\sqrt{2})$ para el que $f'(c) = 0$.**

$f(x) = x^3 - 18x$ es derivable en todo $\mathbb{R}$: por tanto, es continua en $[0, 3\sqrt{2}]$ y derivable en $(0, 3\sqrt{2})$.

Además, $f(0) = f(3\sqrt{2}) = 0$. Luego verifica la hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 3\sqrt{2}]$.

Existe, pues, un $c \in (0, 3\sqrt{2})$ tal que $f'(c) = 0$.

Lo calculamos: $f'(x) = 3x^2 - 18 = 0 \ \to\ x = \pm\sqrt{6}$ $\begin{cases} x = -\sqrt{6} \notin (0, 3\sqrt{2}) \\ x = \sqrt{6} \in (0, 3\sqrt{2}) \end{cases}$

Por tanto, $c = \sqrt{6}$.

66 **La función $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$, ¿cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 4]? En caso afirmativo, di cuál es el x_0 que cumple la tesis.**

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ es continua en [0, 4] y derivable en (0, 4); luego cumple las hipótesis del teorema del valor medio en [0, 4].

Veamos en que punto, o puntos, cumple la tesis:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$$

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{-6 - (-2)}{4} = \frac{-6 + 2}{4} = -1$$

$$f'(x) = -1 \to 3x^2 - 10x + 3 = -1 \to 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 48}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{10 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{3}$$

Hay dos puntos: $x_0 = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{3}$ y $x_1 = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{3}$

67 **Se tiene la función:** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } -2 \le x \le -1 \\ \dfrac{x^2 - 3}{2} & \text{si } -1 < x \le 0 \end{cases}$

Prueba que f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en [–2, 0] y calcula el o los puntos en los que se cumple el teorema.

Veamos que $f(x)$ es continua en [–2, 0]:

- Si $x \ne -1 \to f(x)$ es continua, pues está formada por dos funciones continuas.
- Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{1}{x}\right) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{x^2 - 3}{2}\right) = -1 \\ f(1) = -1 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = -1$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en [–2, 0].

Veamos que $f(x)$ es derivable en [–2, 0]:

- Si $x \ne -1$ y $x \in (-2, 0)$, f es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } -2 < x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

- En $x = -1$, tenemos que:

$$f'(-1^-) = f'(-1^+)$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en (–2, 0).

Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } -2 < x \le -1 \\ x & \text{si } -1 \le x < 0 \end{cases}$$

Como $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en [–2, 0], existe algún punto, $c \in (-2, 0)$, tal que $f'(c) = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \dfrac{-3/2 - (-1/2)}{2} = \dfrac{-1}{2}$.

Calculamos c:

- $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ si $-2 < x \le -1$

$$-\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2} \to x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \in (-2, -1) \\ x = \sqrt{2} \notin (-2, -1) \end{cases}$$

- $f'(x) = x$ si $-1 \le x < 0$

$x = -\frac{1}{2} \in (-1, 0)$

- Por tanto, hay dos soluciones:

$c_1 = -\frac{1}{2}$ y $c_2 = -\sqrt{2}$

68 **¿Es posible calcular a, b, c para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 5x+1 & \text{si } x<1 \\ ax^2+bx+3 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

cumpla el teorema de Rolle en el intervalo $[0, c]$?

El teorema de Rolle dice: Si f es una función continua en $[0, c]$ y derivable en $(0, c)$ y $f(0) = f(c)$, existe algún punto $x \in (0, c)$ tal que $f'(x) = 0$.

Calculamos a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable.

- Continuidad:
  - — Si $x \ne 1 \to f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.
  - — En $x = 1$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (5x+1) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (ax^2+bx+3) = a+b+3 \\ f(1) = a+b+3 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $a + b + 3 = 6$; es decir: $a + b = 3$

- Derivabilidad:
  - — Si $x \ne 1 \to f(x)$ es derivable. Además: $f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x<1 \\ 2ax+b & \text{si } x>1 \end{cases}$
  - — En $x = 1$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 5 \\ f'(1^+) = 2a+b \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable, ha de ser: $2a + b = 5$

- Con las dos condiciones obtenidas, hallamos a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=3 \\ 2a+b=5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b=3-a \\ 2a+3-a=5 \to a=2 \to b=1 \end{array}$$

- Con estos valores de a y b, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 5x+1 & \text{si } x<1 \\ 2x^2+x+3 & \text{si } x \ge 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x<1 \\ 4x+1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

$f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \to f(x)$ es creciente $\to$ No existe ningún valor de c tal que $f(0) = f(c)$ puesto que:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(c) = 2c^2+c+3 \end{array}\right\} 2c^2+c+3 = 1 \to 2c^2+c+2 = 0 \to c = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{4} \text{ no tiene solución.}$$

No existe ningún c tal que $f(x)$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, c]$.

69 **La función $f(x) = |cos\ x|$ toma en los extremos del intervalo $[0, \pi]$ el valor 1. ¿Cumplirá el teorema de Rolle?**

$$f(x) = \begin{cases} cos\ x & \text{si } 0 \le x \le \pi/2 \\ -cos\ x & \text{si } \pi/2 \le x \le \pi \end{cases} \quad \text{es continua en } [0, \pi].$$

Además, $f(0) = f(\pi) = 1$.

La derivada de $f(x)$, si $x \ne \dfrac{\pi}{2}$ es: $f'(x) = \begin{cases} -sen\ x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ sen\ x & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$

Como $f'\left(\dfrac{\pi}{2}^-\right) = -1 \ne f'\left(\dfrac{\pi}{2}^+\right) = 1$, $f(x)$ no es derivable en $x = \dfrac{\pi}{2} \in (0, \pi)$.

Por tanto, $f(x)$ no es derivable en el intervalo $(0, \pi)$; y no podemos aplicar el teorema de Rolle.

70 **Sea f una función continua y derivable tal que $f(0) = 3$. Calcula cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en [0, 5] existe un c tal que $f'(c) = 8$.**

Si $f(x)$ es continua en [0, 5] y derivable en (0, 5), por el teorema del valor medio, podemos asegurar que existe $c \in (0, 5)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0}$$

En este caso: $f'(c) = \dfrac{f(5) - 3}{5 - 0} = \dfrac{f(5) - 3}{5} = 8 \rightarrow f(5) = 43$

71 **Calcula a y b para que:**

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2, 6]. ¿Dónde cumple la tesis?

El teorema del valor medio dice: si f es una función continua en [2, 6] y derivable en (2, 6), existe algún punto $c \in (2, 6)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f'(6) - f'(2)}{6 - 2}$.

- Continuidad:

— Si $x \ne 4 \rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

— En $x = 4$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (ax - 3) = 4a - 3 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (-x^2 + 10x - b) = 24 - b \\ f(4) = 24 - b \end{array}\right\}$$ Para que sea continua, ha de ser: $4a - 3 = 24 - b$; es decir: $4a + b = 27$

- Derivabilidad:

— Si $x \ne 4 \rightarrow f(x)$ es derivable. Su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

— En $x = 4$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-) = a \\ f'(4^+) = 2 \end{array}\right\}$$ Para que sea derivable, ha de ser: $a = 2$

- Uniendo los dos resultados obtenidos:

$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = 27 \\ a = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 19 \end{array}$$

- Por tanto, si $a = 2$ y $b = 19$, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2, 6]$. En este caso quedaría:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 19 & \text{si } x \ge 4 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

- Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$-2x + 10 = 1 \;\to\; x = \frac{9}{2} \in (2, 6)$$

La tesis se cumple en $c = \dfrac{9}{2}$.

72 **Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Prueba que $f(1) = f(-1) = 0$, pero que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. Explica por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.**

$$f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}} \;\to\; \text{No existe } f'(0)$$

Por tanto, $f(x)$ no es derivable en el intervalo $(-1, 1)$; y no podemos aplicar el teorema de Rolle.

73 **La derivada de una función f es positiva para todos los valores de la variable. ¿Puede haber dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$? Razónalo.**

No es posible, si la función es derivable (y nos dicen que lo es, pues $f'(x) > 0$ para todo x).

Lo probamos por reducción al absurdo:

Supongamos que existen dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$.

$f(x)$ es derivable para todo x. Por el teorema de Rolle, habría un punto c, en el que $f'(c) = 0$.

Esto contradice el que $f'(x) > 0$ para todo x.

74 **Calcula a, b y c para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$. ¿En qué punto se cumple la tesis?

- Continuidad:
  - — Si $x \ne 2 \to f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.
  - — En $x = 2$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (cx + 1) = 2c + 1 \\ f(2) = 2c + 1 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $4 + 2a + b = 2c + 1$; es decir: $2a + b - 2c = -3$

- Derivabilidad:
  - — Si $x \ne 2 \to f(x)$ es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 2 \\ c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

  - — En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = c \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable, ha de ser: $4 + a = c$

- $\left.\begin{array}{l} f(0)=b \\ f(4)=4c+1 \end{array}\right\} \; b = 4c + 1$
- Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle en [0, 4], ha de cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 2a+b-2c=-3 \\ 4+a=c \\ b=4c+1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=-3 \\ b=5 \\ c=1 \end{array}$$

En este caso sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \le 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Y se cumplirían las hipótesis del teorema de Rolle.

- Veamos dónde cumple la tesis:

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{3}{2} \in (0, 4)$$

Por tanto, la tesis se cumple en $x = \dfrac{3}{2}$.

Página 301

75 **Dada la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{ln\,(3^x + x) + ln\,(x^2 - 10x + 20)}}$$

demuestra que existe un valor $a \in (1, 2)$ tal que $f'(a) = 0$.

Menciona y justifica los resultados teóricos empleados.

Consideremos la función $g(x) = 3^x + x$.

$g'(x) = 3^x\, ln\, 3 + 1 > 0 \;\rightarrow\; g(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$. En particular lo es en el intervalo [1, 2].

Luego $g(x) > g(1) = 4$ cuando $x \in [1, 2] \;\rightarrow\; ln\,[g(x)] > ln\,[g(1)] = ln\,4 > 0$ cuando $x \in [1, 2]$ por ser creciente la función logaritmo neperiano.

Consideremos ahora la función $h(x) = x^2 - 10x + 20$.

$h'(x) = 2x - 10 < 0$ cuando $x \in [1, 2] \;\rightarrow\; h(x)$ decreciente en $x \in [1, 2] \;\rightarrow\; h(x) > h(2) = 4 \;\rightarrow$
$\rightarrow\; ln\,[h(x)] > ln\,[h(1)] = ln\,4 > 0$ por ser creciente la función logaritmo neperiano.

Por tanto, el radicando de $f(x)$ es la suma de dos números positivos y la raíz está bien definida.

$f(x)$ es derivable en el intervalo [1, 2].

$f(x)$ es derivable en (1, 2).

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = \sqrt{ln\,4 + ln\,11} \\ f(2) = \sqrt{ln\,11 + ln\,4} \end{array}\right\} \;\rightarrow\; f(1) = f(2)$$

Por el teorema de Rolle existe un valor $a \in (1, 2)$ tal que $f'(a) = 0$.

76 **[La justificación de la validez de las afirmaciones permite trabajar la destreza expresión oral de esta clave].**

¿Verdadero o falso? Razona la respuesta.

a) Una función que no sea una recta puede tener infinitos puntos en los que su recta tangente sea $y = 1$.

b) Si $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, entonces f no puede tener ni máximo ni mínimo en $x = a$.

c) Si un polinomio de grado 3 tiene un mínimo en $x = 2$, ese mínimo no puede ser mínimo absoluto.

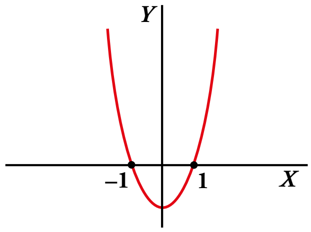
d) Una función continua en [0, 5], que no es derivable en $x = 3$, no puede tener un máximo en $x = 3$.

e) Si $y = f(x)$ es creciente en $x = a$, entonces $y = -f(x)$ es decreciente en $x = a$.

f) Si $f'(a) = 0$, f tiene un máximo o un mínimo en $x = a$.

g) Si $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ y $f'''(a) = -5$, f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

h) Si esta es la gráfica de $f'(x)$, entonces f tiene un mínimo en $x = -1$ y un máximo en $x = 1$.



a) Verdadero.

Las funciones $y = sen\ x$ o $y = cos\ x$ tienen infinitos puntos en los que la recta tangente es $y = 1$. Sucede en los máximos relativos de la función.

b) Falso.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^4$ tiene un mínimo relativo en (0, 0) y $f'(0) = f''(0) = 0$

c) Verdadero.

La razón es que en un polinomio de tercer grado $p(x)$ ocurre que:

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = +\infty \iff \lim_{x \to +\infty} p(x) = -\infty$$

o bien,

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty \iff \lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$$

Los polinomios de tercer grado no tienen ni máximos ni mínimos absolutos.

d) Falso.

La función $y = 2 - |x - 3|$ no es derivable en $x = 3$ y tiene un máximo en ese punto.

e) Verdadero.

Supongamos que $f(x)$ es creciente en $x = a$.

Entonces existe un entorno E en el que si $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$.

Pero $f(x_1) < f(x_2) \to -f(x_1) > -f(x_2)$. Luego $-f(x)$ es decreciente en ese mismo entorno E.

f) Falso.

La función $y = x^3$ es creciente en $x = 0$, pero $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$.

g) Verdadero.

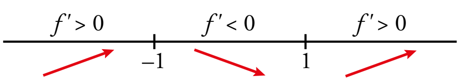
Si $f''(a) = -5 \to$ Existe un entorno de $x = a$ en el que $f''(x)$ es decreciente.

Como $f''(a) = 0$, en ese entorno, $f''(x) > 0$ cuando $x < a$ y $f''(x) < 0$ cuando $x > a$.

Por tanto, la función pasa de cóncava a convexa y tiene un punto de inflexión en $x = a$.

h) Falso.

La tabla de los signos de la primera derivada es:



Por tanto, tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$.

Para profundizar

77 **En un experimento se han realizado cinco medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes:**

$$m_1 = 0{,}92;\ m_2 = 0{,}94;\ m_3 = 0{,}89;\ m_4 = 0{,}90;\ m_5 = 0{,}91$$

Se tomará como mejor aproximación a la medida real el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función:

$$E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \ldots + (x - m_5)^2$$

alcanza el mínimo. Calcula dicho valor de x.

$E(x) = (x - 0{,}92)^2 + (x - 0{,}94)^2 + (x - 0{,}89)^2 + (x - 0{,}90)^2 + (x - 0{,}91)^2$

$E'(x) = 2(x - 0{,}92) + 2(x - 0{,}94) + 2(x - 0{,}89) + 2(x - 0{,}90) + 2(x - 0{,}91) = 10x - 9{,}12$

$E'(x) = 0 \to x = 0{,}912$

$E''(x) = 10 > 0$ para todo x, por tanto, en $x = 0{,}912$ la función alcanza un mínimo.

Ese mínimo es:

$E(0{,}912) = 0{,}00148$

78 **Demuestra que existe $\alpha \in (-1,3)$ tal que $f'(\alpha) = \dfrac{-1}{4}$ siendo $f(x) = [x^2 + log(x^2 - 2x + 7)]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}}$**

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

$\alpha(x) = x^2 + log\,(x^2 - 2x + 7)$ es derivable en el intervalo $(-3,\ 1)$ porque $x^2 - 2x + 7 > 0$ para todo x y, por tanto, $log\,(x^2 - 2x + 7)$ es derivable:

$$\alpha'(x) = 2x + \frac{2(x+1)}{(x^2 - 2x + 7)\,ln\,10}$$

$\beta(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3-x}{4}}$, también es derivable en $(-3,\ 1)$ aunque, tiene tangente vertical en $x = 3$ ya que:

$$\beta'(x) = -\frac{1}{3(6-2x)^{2/3}}$$

Por tanto, en el intervalo $(-1,\ 3)$, $f(x)$ es derivable, la derivada es:

$$\phi(x) = \alpha(x)^{\beta(x)} \to \phi'(x) = \alpha(x)^{\beta(x)}\left[\beta'(x)\cdot ln\,\alpha(x) + \beta(x)\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right]$$

y, por lo que hemos visto, existe en todos los puntos del intervalo.

Por otra parte, $f(x)$ es continua en $[-1,\ 3]$ porque lo son las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$.

Veamos ahora:

$$f(-1) = [1 + log\,(1 + 2 + 7)]^{\sqrt[3]{\frac{3+1}{4}}} = (1 + 1)^1 = 2$$

$$f(3) = [9 + log\,(9 - 6 + 7)]^{\sqrt[3]{\frac{3-3}{4}}} = 10^0 = 1$$

Por tanto, por el teorema del valor medio, existe $\alpha \in (-1,\ 3)$ tal que:

$$f(\alpha) = \frac{f(3) - f(-1)}{3-(-1)} = \frac{1-2}{4} = \frac{-1}{4}$$

79 **Cuando un globo está a 200 m sobre el suelo y se eleva a 15 m/s, un automóvil pasa bajo él con velocidad de 45 km/h. ¿Con qué velocidad se separan coche y globo un segundo después?**

Ten en cuenta lo siguiente:

— El globo está a $200 + 15t$ m de altura en el instante t.

— El coche está a $(45/3,6) \cdot t$ m de la vertical del globo.

Halla la distancia entre ambos y averigua la velocidad de alejamiento cuando $t = 1$.

La distancia entre el coche y el globo en función del tiempo es:

$$d(t) = \sqrt{(200 + 15t)^2 + \left(\frac{45}{3,6}t\right)^2} = \sqrt{381,25t^2 + 6\,000t + 40\,000}$$

La velocidad de alejamiento es la derivada del espacio que los separa.

$$d'(t) = \frac{762,5t + 6\,000}{2\sqrt{381,25t^2 + 6\,000t + 40\,000}}$$

Al cabo de 1 segundo es:

$$d'(1) = \frac{762,5 + 6\,000}{2\sqrt{381,25 + 6\,000 + 40\,000}} = 15,7 \text{ m/s}$$

AUTOEVALUACIÓN

Página 301

1 Halla los puntos de la función:

$$f(x) = ln\, \frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}$$

en los que la recta tangente sea paralela a la recta $y = 2x - 3$.

Para que la recta tangente sea paralela a la recta dada, la pendiente de la recta tangente debe ser 2.

$$f(x) = ln\,(1 - cos\, x) - ln\,(1 + cos\, x)$$

$$f'(x) = \frac{sen\, x}{cos\, x + 1} - \frac{sen\, x}{cos\, x - 1} = \frac{-2\, sen\, x}{cos^2 x - 1} = \frac{-2\, sen\, x}{-sen^2 x} = \frac{2}{sen\, x}$$

ya que $sen\, x \neq 0$ (en caso contrario no estaría definida la función).

$$f'(x) = 2 \rightarrow \frac{2}{sen\, x} = 2 \rightarrow sen\, x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

2 Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los de concavidad y convexidad de la función siguiente:

$$f(x) = x|x - 2|$$

$$f(x) = x|x-2| = \begin{cases} -x(x-2) & \text{si } x < 2 \\ x(x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función no es derivable en $x = 2$ porque $f'(2^-) \neq f'(2^+)$.

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1 < 2 \\ 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \not> 2 \end{cases}$$

La tabla de los signos de la derivada primera es:

$$\begin{array}{ccccc} f' > 0 & & f' < 0 & & f' > 0 \\ \nearrow & 1 & \searrow & 2 & \nearrow \end{array}$$

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(2, +\infty)$.

Es decreciente en el intervalo $(1, 2)$.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

f es convexa es $(-\infty, 2)$ y cóncava en $(2, +\infty)$.

3 Estudia el crecimiento de la función $f(x) = e^x(cos\, x + sen\, x)$ y determina sus máximos y mínimos para $x \in [0, 2\pi]$.

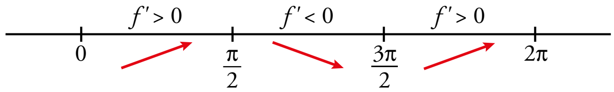
Consideramos la función: $f(x) = e^x(cos\, x + sen\, x)$ para $x \in [0, 2\pi]$.

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = e^x(cos\, x + sen\, x) + e^x(-sen\, x + cos\, x) = e^x(2\, cos\, x) = 2e^x\, cos\, x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow cos\, x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{array} \right\} \text{(para } x \in [0, 2\pi])$$

Signo de la derivada:



La función es creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ y decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Tiene un máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, e^{\pi/2}\right)$ y un mínimo en $\left(\frac{3\pi}{2}, -e^{3\pi/2}\right)$.

4 a) Estudia la curvatura de la siguiente función: $f(x) = x^2 \ ln\, x$

b) Escribe la ecuación de la recta tangente que pasa por su punto de inflexión.

a) • El dominio de definición de la función es $(0, +\infty)$.

• f es cóncava en los intervalos donde $f'' > 0$ y convexa si $f'' < 0$.

• Calculamos f' y f'':

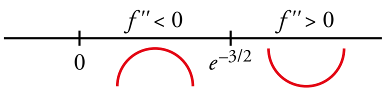
$$f(x) = x^2 \cdot ln\, x \to f'(x) = 2x \cdot ln\, x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2\, ln\, x + 1)$$

$$f''(x) = 1 \cdot (2\, ln\, x + 1) + x\left(2 \cdot \frac{1}{x}\right) = 2\, ln\, x + 3$$

$$f''(x) = 0 \to 2\, ln\, x + 3 = 0 \to ln\, x = -\frac{3}{2} \to x = e^{-3/2} \to f(e^{-3/2}) = -\frac{3}{2}e^{-3}$$

• Estudiamos el signo de f'' teniendo en cuenta el dominio de f, $(0, +\infty)$, y el punto donde $f''(x) = 0$, $x = e^{-3/2} \approx 0{,}22$:

Signo de la derivada:



• Conclusiones:

— f es convexa en $(0, e^{-3/2})$.

— f es cóncava en $(e^{-3/2}, +\infty)$.

— Punto de inflexión: $\left(e^{-3/2}, -\frac{3}{2}e^{-3}\right)$

b) • Pendiente de la recta tangente en $x = e^{-3/2}$:

$$m = f'(e^{-3/2}) = e^{-3/2}\,(2\, ln\, e^{-3/2} + 1) = e^{-3/2}\left[2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1\right] = -2e^{-3/2}$$

• Ecuación de la recta tangente en $\left(e^{-3/2}, -\frac{3}{2}e^{-3}\right)$:

$$y = -\frac{3}{2}e^{-3} - 2e^{-3/2}(x - e^{-3/2})$$

5 **Determina a, b, c y d para que la función:**

$$\boldsymbol{g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$$

tenga un máximo relativo en el punto (0, 4) y un mínimo relativo en el punto (2, 0).

$g(x)$ tiene un máximo relativo en (0, 4) $\rightarrow \begin{cases} g(0) = 4 \\ g'(0) = 1 \end{cases}$

$g(x)$ tiene un mínimo relativo en (2, 0) $\rightarrow \begin{cases} g(2) = 0 \\ g'(2) = 0 \end{cases}$

$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$g(0) = 4 \rightarrow d = 4$

$g'(0) = 0 \rightarrow c = 0$

$g(2) = 0 \rightarrow 8a + 4b + 4 = 0$

$g'(2) = 0 \rightarrow 12a + 4b = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 4a + 2b = -1 \\ 12a + 4b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = -2$$

La función buscada es $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4$.

Es una función polinómica de tercer grado en la que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, luego (0, 4) es el máximo relativo y (2, 0) es el mínimo, por estar el primero a la izquierda del segundo.

6 **Calcula el punto de la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.**

La pendiente de la recta tangente a $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en x es $f'(x)$. Tenemos que hallar el máximo de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Buscamos los puntos donde la derivada de $f''(x)$ es 0:

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \begin{cases} f'(\sqrt{3}/3) = (-3\sqrt{3})/8 \\ f'(-\sqrt{3}/3) = (3\sqrt{3})/8 \end{cases}$$

Estudio del signo de f'':

$f'' > 0$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$f'' < 0$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$f'' > 0$
↗		↘		↗

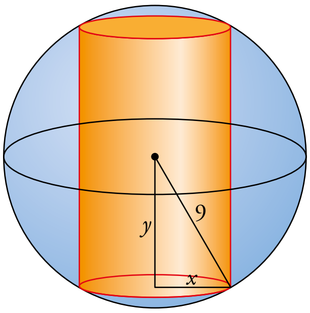
$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$$

En $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ hay un máximo de $f'(x)$ y en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ hay un mínimo de $f'(x)$.

Por tanto, el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima es:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

7 De todos los cilindros que pueden inscribirse en una esfera de 9 cm de radio, halla la altura y el radio del que tiene mayor volumen.



Llamaremos x al radio del cilindro e y a la mitad de la altura. Entonces:

$$x^2 + y^2 = 81 \to y = \sqrt{81 - x^2} \text{ donde } x \in (0, 9).$$

El volumen del cilindro es:

$$V(x) = \pi x^2 \cdot 2\sqrt{81 - x^2} = 2\pi x^2 \sqrt{81 - x^2}$$

Para hallar el de volumen máximo calculamos el máximo relativo de la función anterior.

$$V'(x) = 2\pi\left(2x\sqrt{81 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{81 - x^2}}\right) = -6\pi \frac{x(x^2 - 54)}{\sqrt{81 - x^2}}$$

$$V'(x) = 0 \to x(x^2 - 54) = 0 \to x = 0 \text{ (no vale)}, \ x = -3\sqrt{6} \text{ (no vale)}, \ x = 3\sqrt{6}$$

Estudiamos los signos de $V'(x)$ cerca del punto singular:

$V' > 0$ | $3\sqrt{6}$ | $V' < 0$ $\to$ En $x = 3\sqrt{6}$ hay un máximo relativo.

$$x = 3\sqrt{6} \to \text{radio} = 3\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$y = 3\sqrt{3} \to \text{altura} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$V(3\sqrt{6}) = 2\pi \cdot 54 \cdot \sqrt{81 - 54} \approx 1763 \text{ cm}^3$$

8 La función $f(x) = 1 - |x|$ si $x \in [-2, 2]$ verifica la igualdad $f(-2) = f(2)$.
Justifica si es posible encontrar algún $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

$$f(x) = 1 - |x| = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

El teorema de Rolle dice que si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Comprobamos si la función f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 2]$:

- Veamos si f es continua en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} 1 + x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 1 - x = 1 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$$

  f es continua en $[-2, 2]$

- Estudiamos la derivabilidad de f:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

  $f'(1^-) \ne f'(1^+)$. f no es derivable en $x = 0 \to f$ no es derivable en $(-2, 2)$.

- f no cumple las hipótesis del teorema de Rolle; por tanto, no podemos asegurar que exista un $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.